УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ФАКУЛТЕТ ЗАШТИТЕ НА РАДУ

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Ниш, 11. 9. 2024.

1. Израчунати: $\left(1+a+\dfrac{1}{1-a}\right):\left(1+\dfrac{1}{1-a^2}\right)$.

Решење.

$$\left(1+a+\frac{1}{1-a}\right):\left(1+\frac{1}{1-a^2}\right)=\left(\frac{(1+a)(1-a)+1}{1-a}\right):\left(\frac{1-a^2+1}{1-a^2}\right)=$$
$$=\frac{1-a^2+1}{1-a}\cdot\frac{1-a^2}{1-a^2+1}=\frac{1-a^2}{1-a}=\frac{(1-a)(1+a)}{1-a}=a+1.$$

2. Решити систем једначина: $\begin{cases} 2x^2+2x-y-1=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$

Решење. Из друге једначине добијамо да је $y=2x+1$, па прва једначина постаје:

$$2x^2+2x-(2x+1)-1=0,\text{ односно } 2x^2+2x-2x-1-1=0,\text{ и коначно } 2x^2-2=0.$$

Сада решавамо квадратну једначину $2x^2-2=0$ $(a=2, b=0, c=-2)$:

$$x_{1/2}=\frac{0\pm\sqrt{0^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{0\pm 4}{4};\ x_1=\frac{-4}{4}=-1;\ x_2=\frac{4}{4}=1.$$

Добијамо: $y_1=2x_1+1=2\cdot(-1)+1=-1$ и $y_2=2x_2+1=2\cdot 1+1=3$. Решења система су: $(-1,-1)$ и $(1,3)$.

3. Упростити израз: $\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-7x+3}$.

Решење. Користимо формулу: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$.

$$x^2-x-6=0,\ x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 5}{2};\ x_1=\frac{-4}{2}=-2;\ x_2=\frac{6}{2}=3;$$

$$2x^2-7x+3=0,\ x_{1/2}=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm 5}{4};\ x_1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\ x_2=\frac{12}{4}=3.$$

Сада имамо: $\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-7x+3}=\dfrac{(x+2)(x-3)}{2(x-\frac{1}{2})(x-3)}=\dfrac{x+2}{2x-1}$, $x\neq 3$.

4. Дато је $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, при чему је $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Израчунати $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решење. Угао α припада другом квадранту, па је $\sin\alpha > 0$. Прво ћемо наћи $\sin\alpha$. Имамо: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Закључујемо да је $\sin\alpha = +\sqrt{\dfrac{16}{25}} = +\dfrac{4}{5}$. Даље: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4/5}{-3/5} = -\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\dfrac{3}{4}$.

5. Решити једначину: $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) = -2$.

Решење.

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) = -2, \quad 2x-3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4, \;\; 2x-3 = 4,$$

$$2x = 7, \quad x = \frac{7}{2}.$$

Решење дате једначине је $x = \dfrac{7}{2}$.