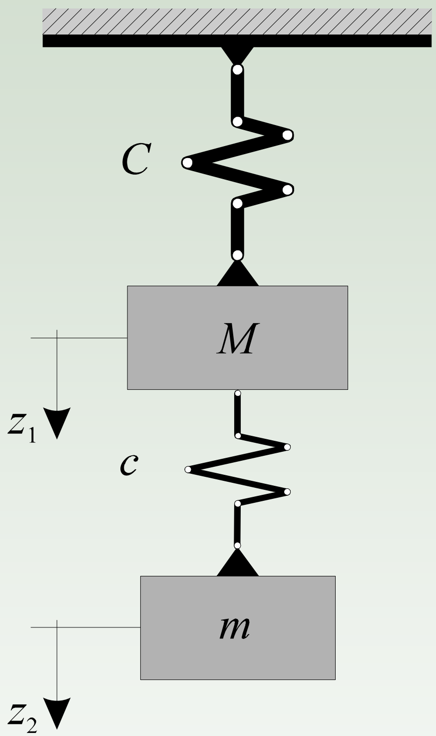
## Sistemi slobode




*Neprigušen sistem sa dva stepena slobode*

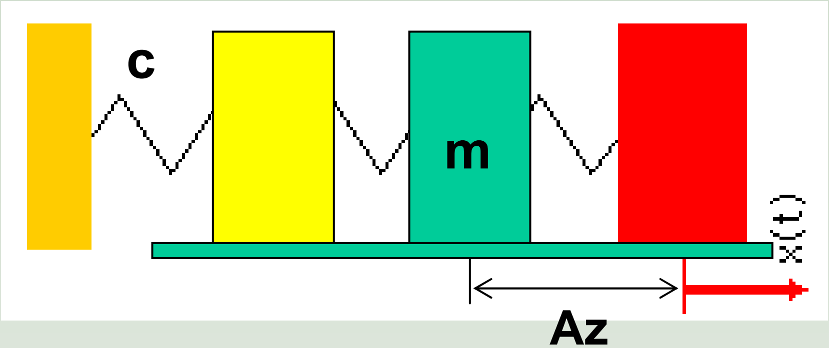
**Minimalan broj generalisanih koordinata kojim se u potpunosti definiše položaj dinamičkih tačaka sistema, predstavlja *stepen slobode sistema*.**

**Za neki sistem kažemo da ima jedan stepen slobode ako se njegova geometrijska konfiguracija može u svakom trenutku opisati jednim jedinim brojem. Mehanički sistem sa *n* stepeni slobode je sistem koji za definisanje svoje konfiguracije zahteva *n* brojeva.**

***Teorija sistema sa jednim stepenom slobode omogućuje da kod mnogih mašina objasnimo pojavu rezonanse, da odredimo sopstvene frekvencije izvesnog broja konstrukcija, da shvatimo principe rada većine instrumenata za merenje vibracija, da razmotrimo problem oslanjanja na oprugama i izolaciju vibracija.***

***Pored svega, izvestan broj praktičnih problema može biti idealizovan sa označenim sistemom, a izvedeni zaključci zna-ajno pragmatični.***

## Horizontalni harmonijski oscilator




Harmonijski oscilator koga čini masa *m* i opruga krutosti *c*, izvodi harmonijske oscilacije po glatkoj horizontalnoj ravni, kada se masa *m* izvede iz ravnotežnog položaja za amplitudu *Az* i pusti.

Zanemarujući masu opruge i trenje na podlozi, a kako se sila težine *mg* poništava sa normalnom komponentom otpora podloge $F_n$, to će se kretanja mase po podlozi vršiti samo pod uticajem sile elastičnosti podloge (*cx*), koja je proporcionalna izduženju opruge.

Diferencijalna jednačina kretanja:

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

je istog oblika kao kod harmonijskog kretanja.

Dobijena je homogena diferencijalna jednačina drugog reda.

**Opšti integral već opisane diferencijalne jednačine je:**

$$z = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

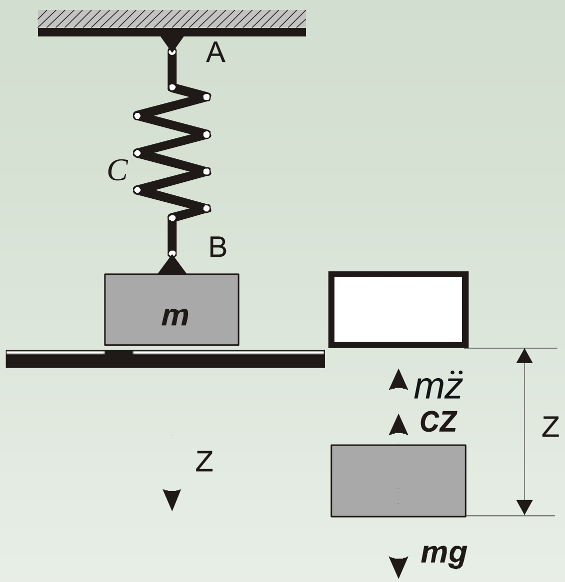
Konstante $C_1$ i $C_2$ se određuju iz početnih uslova tako da je:

$$t = 0, z(t) = z(0)$$
$$z(0) = C_1 \sin \omega_0 \cdot 0 + C_2 \cos \omega_0 \cdot 0$$
$$z(0) = C_2$$

$$t = 0, \dot{z}(t) = \dot{z}(0)$$
$$\dot{z}(0) = C_1 \omega_0 \cos \omega_0 \cdot 0 - C_2 \omega_0 \sin \omega_0 \cdot 0$$
$$\dot{z}(0) = C_1 \omega_0 \Rightarrow C_1 = \frac{\dot{z}(0)}{\omega_0}$$

$$z(t) = \frac{\dot{z}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t + z(0) \cos \omega_0 t$$

# Vertikalni harmonijski oscilator




Vertikalni harmonijski oscilator sa podlogom

O oprugu AB obešena je masa *m* ispod koje se nalazi podloga. Izmicanjem odloge nastaće oscilovanje u vertikalnom pravcu, čija je diferencijalna jednačina kretanja:

$$m\ddot{z} = -cz + mg$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = g$$

nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, koja ima opšti integral u obliku zbira opšteg integrala homogene i partikularnog integrala nehomoge jednačine:

$$z = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

## Amlituda oscilovanja se postiže za poluperiod oscilovanja:

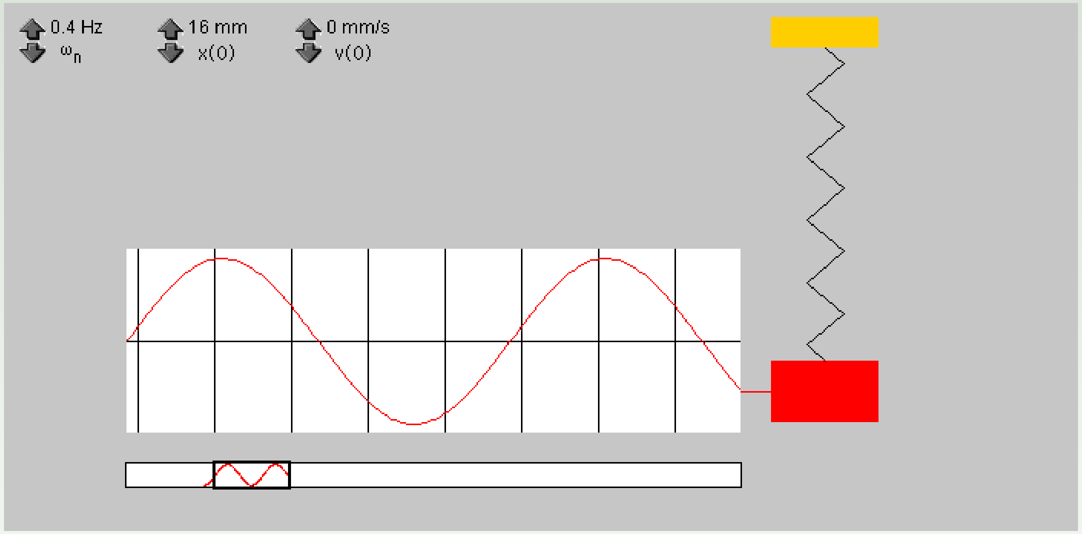
$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \qquad A_z = z_{\max} = \frac{2g}{\omega^2} = 2\frac{G}{c} \qquad A_z = 2z_s$$

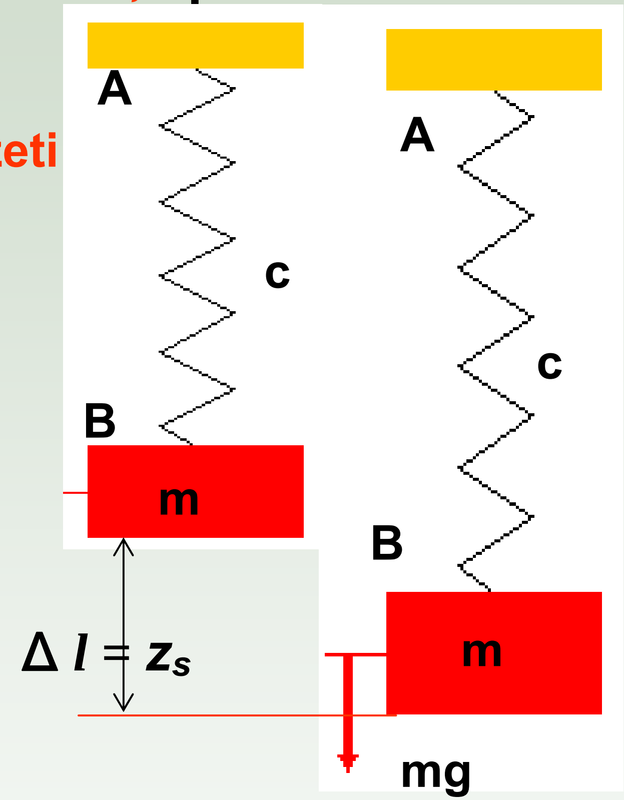
**gde je: $z_s$ – statički ugib opruge**

U drugom slučaju vertikalnog harmonijskog oscilatora, masa **m**, obešena na oprugu **AB**, krutosti **c**, pod uticajem sile težine **mg** izdužiće oprugu za:

$$\Delta l = z_s = \frac{mg}{c} = \frac{g}{\omega^2}$$

pa će materijalna tačka zauzeti ravnotežni položaj.




Ako se nakon toga izvede iz ravnotežnog položa i pusti, nastupiće oscilovanje u vertikalnom pravcu oko ravnotežnog položaja, koje opisuje diferencijalna jednačina kretanja,

$$m\ddot{z} + c\left(z + z_s\right) = mg$$

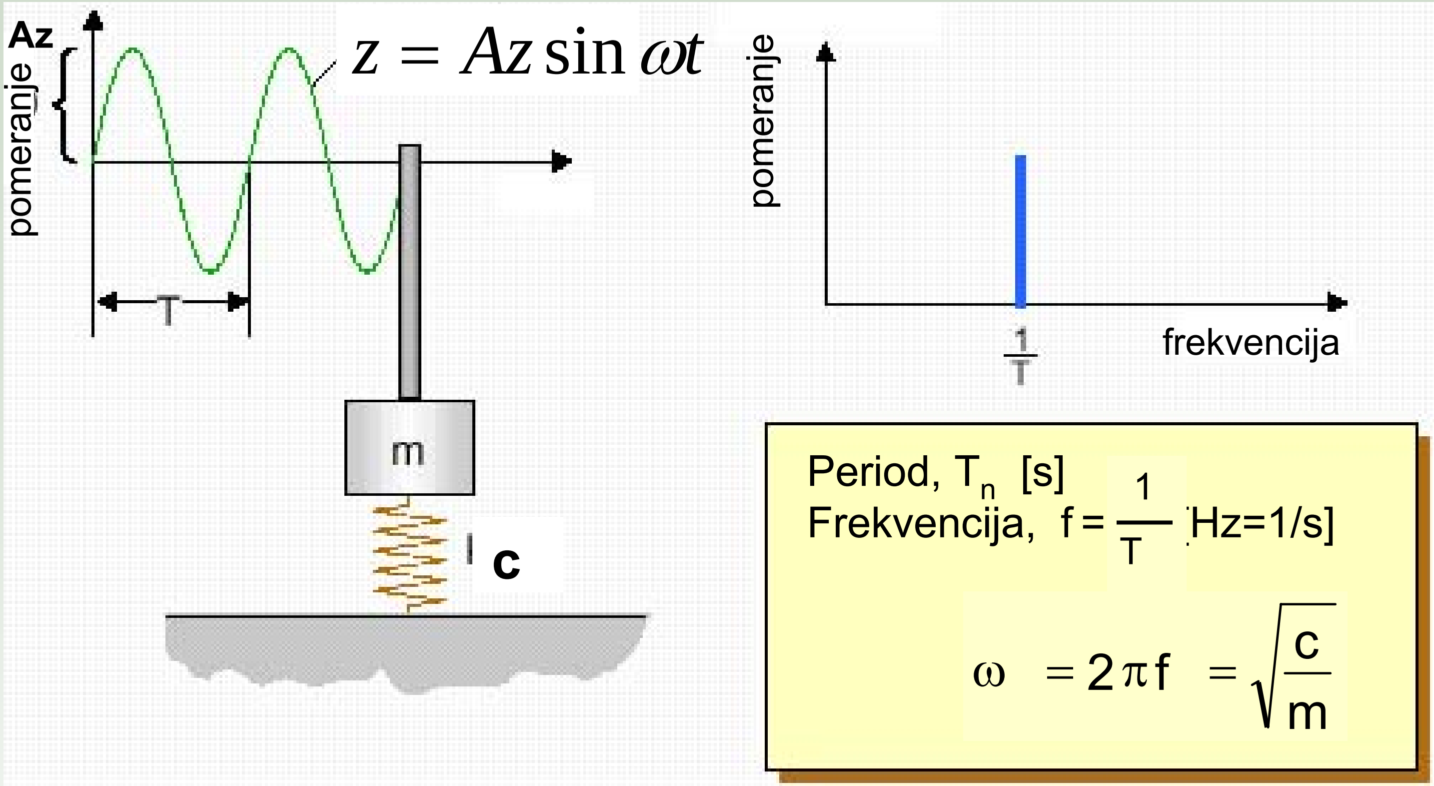
$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0$$

**kao homogena sa konstantnim koeficijentima.**

**Opšti integral već opisane diferencijalne jednačine je:**

$$z = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

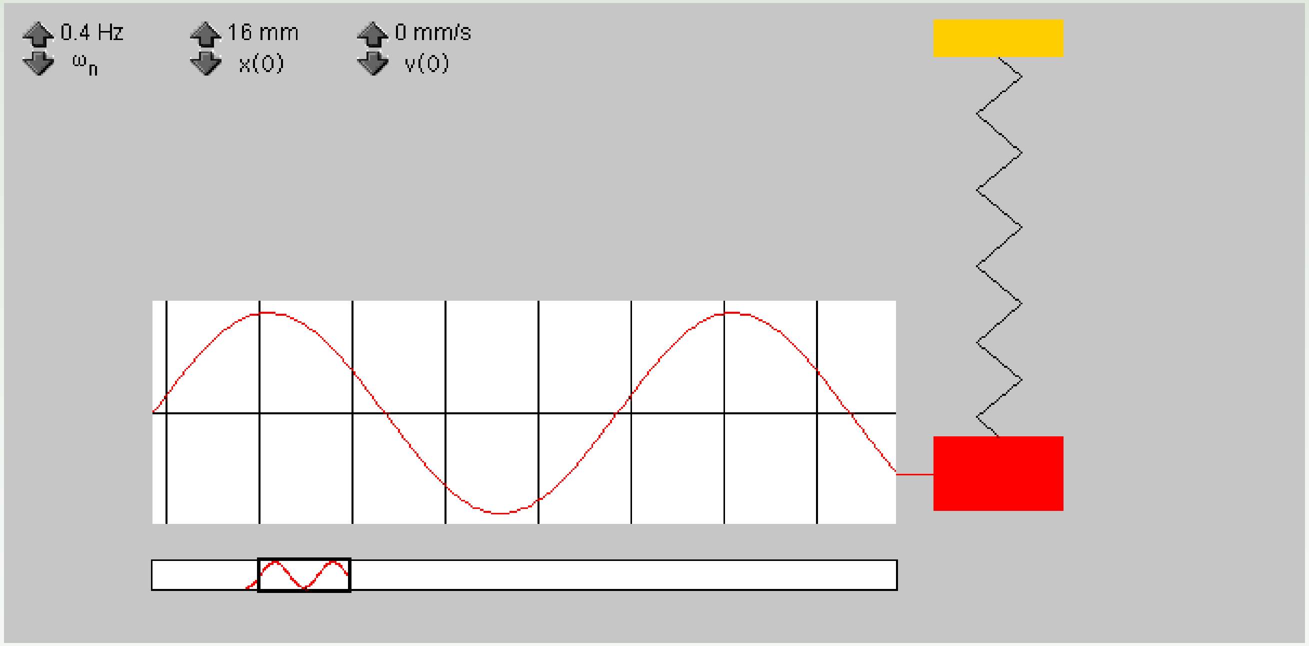
**Težina tela *mg* nema nikakvog uticaja na proces oscilovanja, jer je uravnotežena sa silom elastičnosti $cz_s$ pa se problem svodi na problem horizontalnog oscilatora, odnosno na oscilovanje mase oko ravnotežnog položaja.**

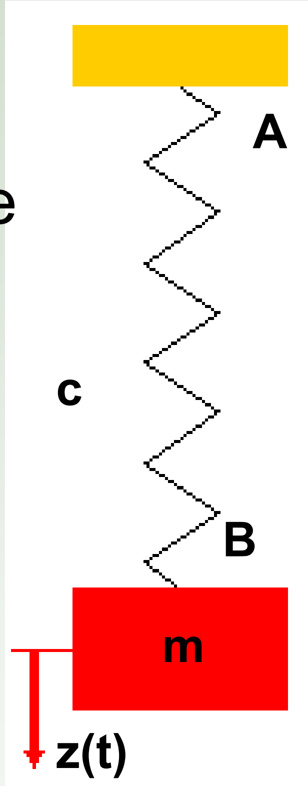



## Masa i opruga

**Kada je teorijski sistem mase i opruge jednom pokrenut, njegovo kretanje se nastavlja sa konstantnom frekvencijom i amplitudom. Sistem će tada oscilovati sinusoidalnom talasnom formom.**

- Slobodne vibracije bez prigušenja mogu se analizirati na primeru vertikalnog harmonijskog oscilatora koji je sastoji od mase i opruge.
- Oscilator se kreće samo u jednom pravcu - z.
- Sistem sa jednim stepenom slobode čije se kretanje može opisati samo jednom koordinatom -z.



# Slobodne vibracije bez prigušenja

- Kretanje tela je harmonijsko sa periodom T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0}$$

i frekvencijom koja je jednaka sopstvenoj frekvenciji sistema:

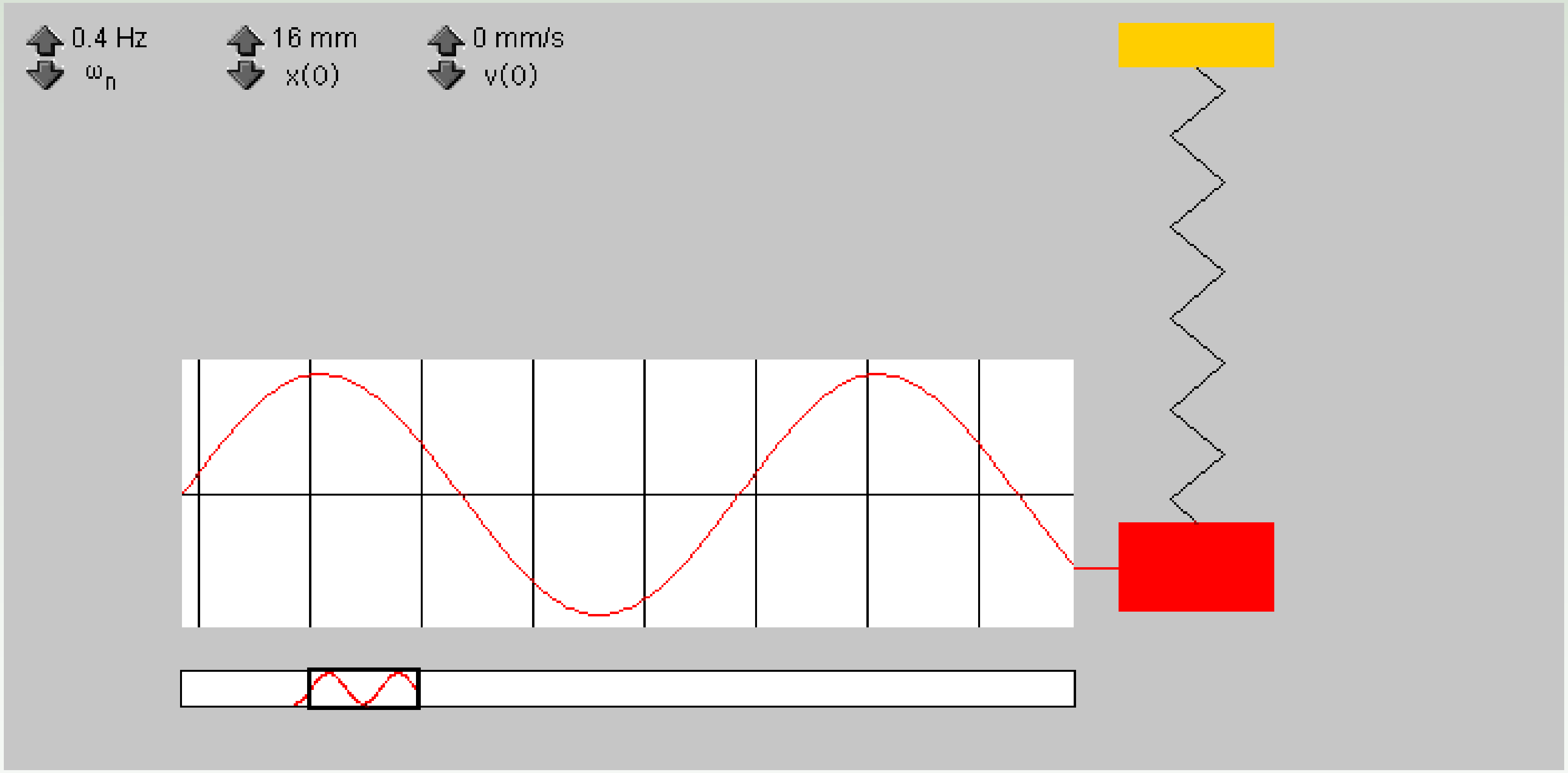
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{z_s}}$$

$$mg = cz_s$$

- Period, kružna frekvencija i frekvencija oscilovanja zavisi od parametara sistema – **krutosti opruge i mase tela**.
- Mogu se odrediti ako je poznat statički ugib opruge $z_s$.

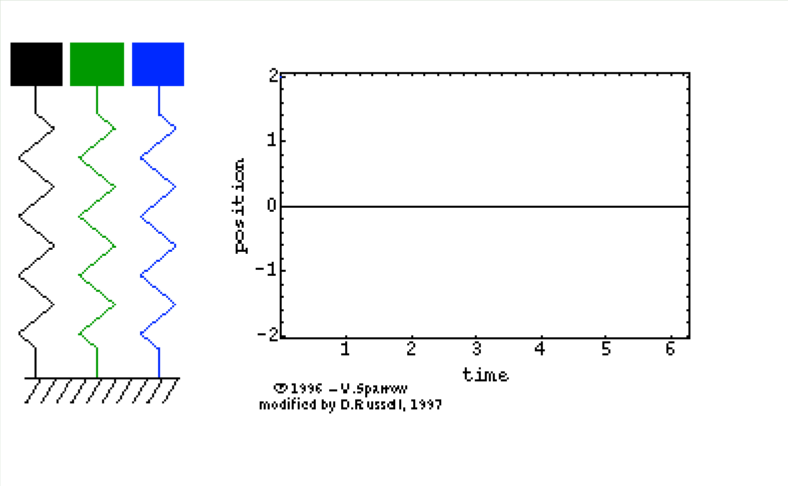
# Slobodne vibracije bez prigušenja

- Teorijski neprigušene slobodne oscilacije traju zauvek. Međutim ovo se ne dešava jer sve slobodne vibracije nestaju posle izvesnog vremena zbog prigušenja koje postoji u svakom sistemu.



- Frekvencija oscilovanja, odnosno sopstvena frekvencija slobodnih oscilacija, može se povećati povećanjem krutosti opruge.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$$

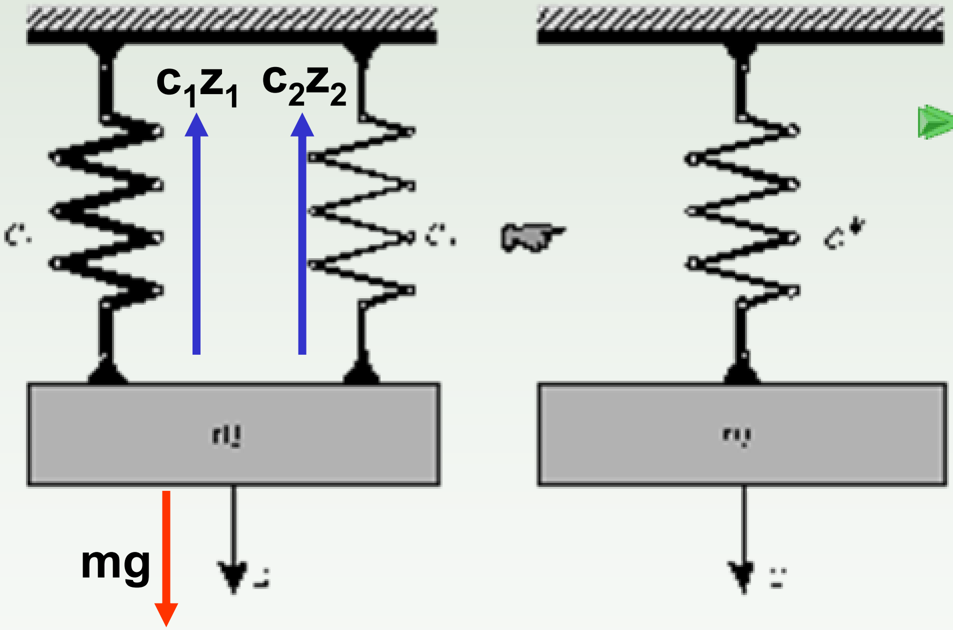



- Povećanje krutosti sistema **masa/opruga** može se postići sprezanjem opruga.
- Opruge mogu biti spregnute u **rednu** i **paralelnu** vezu.
- Više spregnutih opruga različitih krutosti može se zameniti jednom oprugom ekvivalente krutosti.

# Sprezanje opruga - paralelna veza

- Sistem kod koga je masa **m** vezana na dve paralelne opruge može se zameniti jednom oprugom ekvivalentne krutosti **c***.
- Kod sistema paralelnih opruga sve opruge će imati isto statičko izduženje usled delovanja težine tela mase m. Opruga veće krutosti definiše statičko izduženje.

$$z_s = z_1 = z_2$$



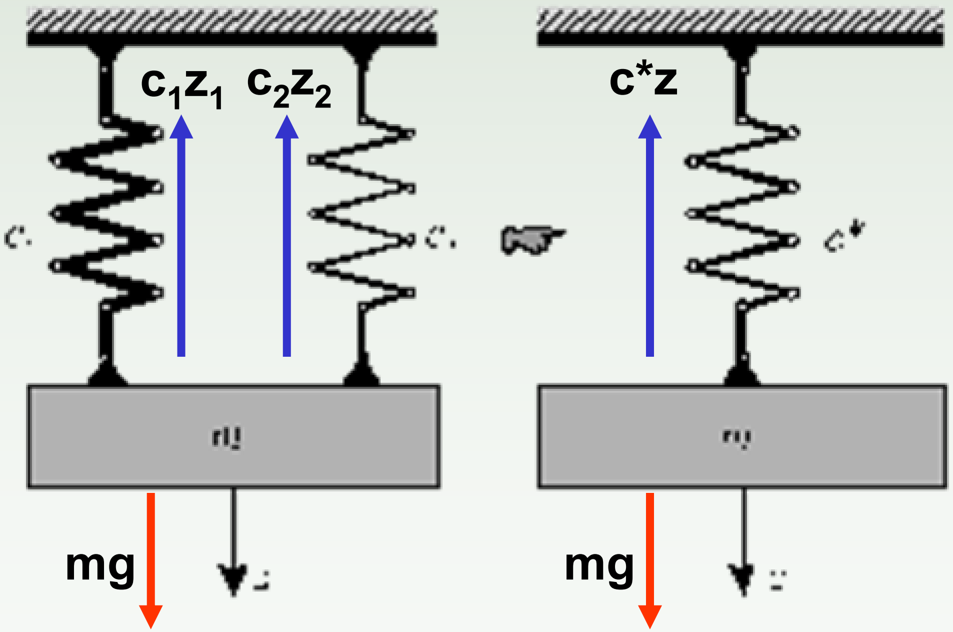

- U statičkom ravnotežnom položaju sila težine i elastične sile u oprugama su u ravnoteži:

$$mg = c_1 z_1 + c_2 z_2 \qquad \textbf{(1)}$$

# Sprezanje opruga - paralelna veza

- Kod ekvivalenetnog sistema opruga krutosti **c*** imaće isto statičko izduženje usled delovanja težine tela mase **m** kao i pojedinčne opruge u posmatranom sistemu.
- U statičkom ravnotežnom položaju sila težine i elastična sile u opruzi krutosti c* su u ravnoteži:

$$mg = c^* z_s \qquad \textbf{(2)}$$




- Izjednačavanjem izraza (1) i (2) dobija se:

$$mg = c^* \delta_s = c_1 z_1 + c_2 z_2$$

$$z_s = z_1 = z_2$$

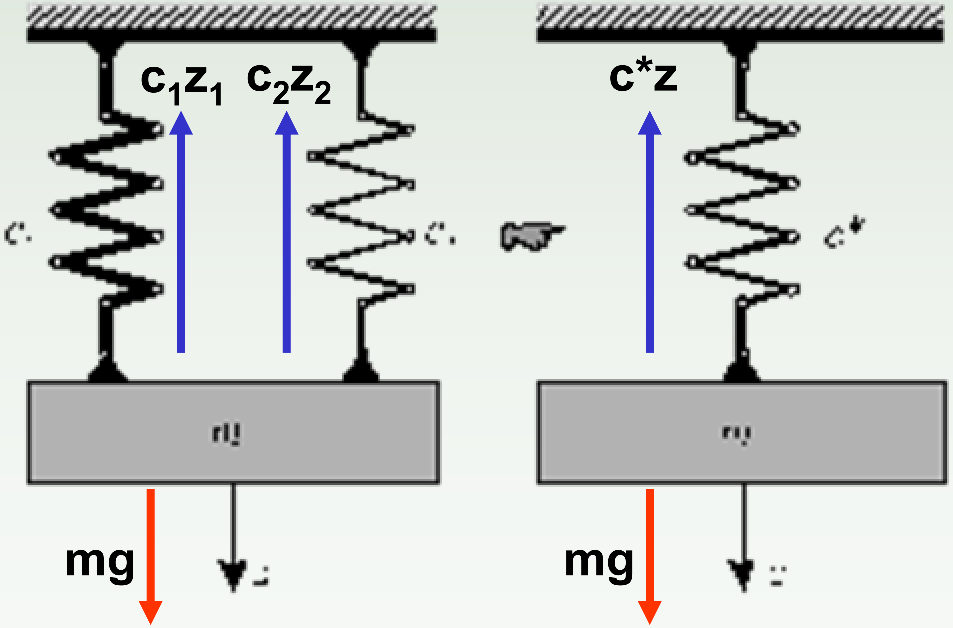
$$c^* = c_1 + c_2$$

# Sprezanje opruga - paralelna veza (+)

- U slučaju kada sistem ima više opruga ekvivalentna krutost se računa kao:

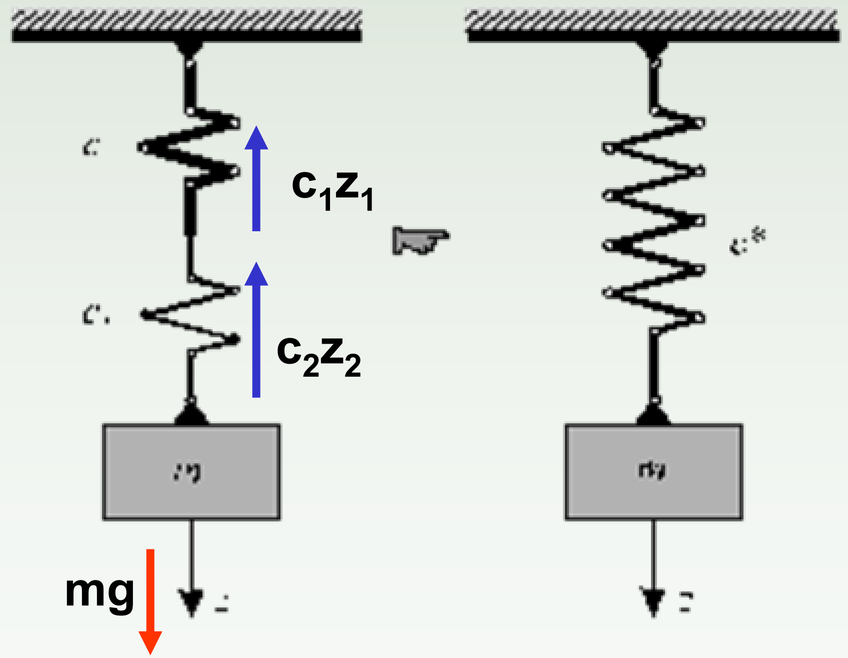
$$c^* = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

- Ekvivalentna krutost jednaka je zbiru krutosti pojedinih opruga.



# Sprezanje opruga - redna veza

- Sistem kod koga je masa **m** vezana na dve **redne** opruge može se zameniti jednom oprugom ekvivalentne krutosti **c***.
- Kod sistema **rednih opruga** masa **m** će usled težine tela različito statički izdužiti opruge u zavisnosti od njihovih krutosti.




$$mg = c_1 z_1 \Rightarrow z_1 = \frac{mg}{c_1}$$

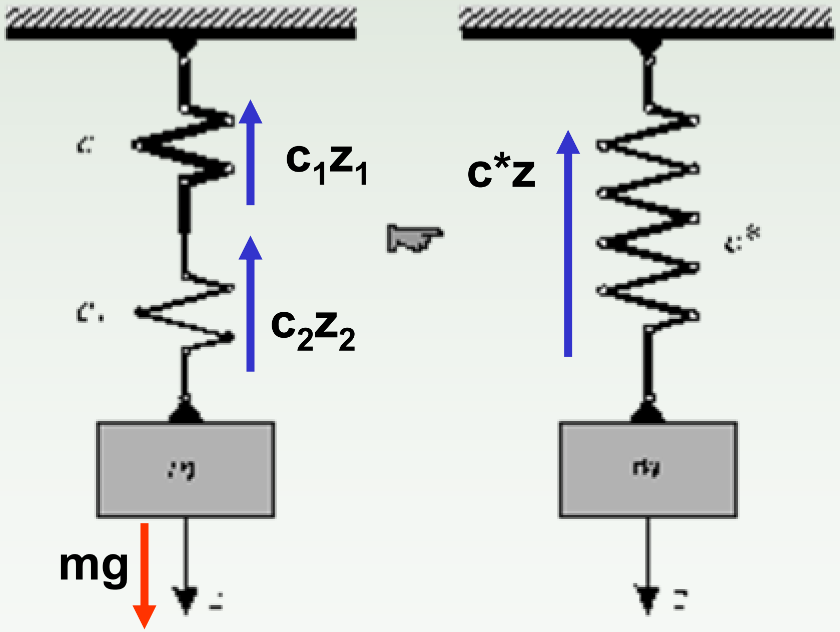
$$mg = c_2 z_2 \Rightarrow z_2 = \frac{mg}{c_2}$$

# Sprezanje opruga - redna veza (+)

- Kod ekvivalentnog sistema masa m će usled težine tela statički izdužiti oprugu u zavisnosti od njene krutosti $c^*$:

$$mg = c^* z \Rightarrow z = \frac{mg}{c^*}$$

- Ukupno statičko izduženje opruge krutosti $c^*$ jednako je zbiru statičkih izduženja pojedinačnih opruga:




$$z = z_1 + z_2$$

$$\frac{mg}{c^*} = \frac{mg}{c_1} + \frac{mg}{c_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c^*} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \Rightarrow$$

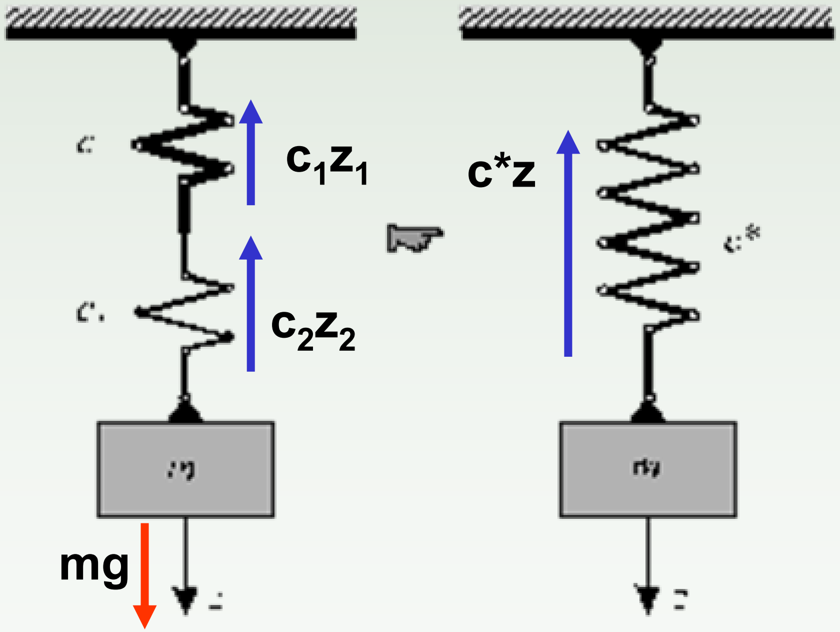
$$c^* = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

# Sprezanje opruga - redna veza

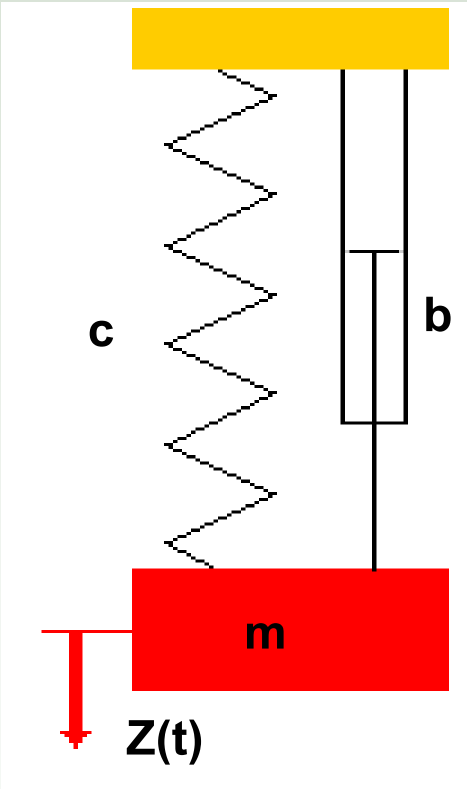
- U slučaju kada sistem ima više opruga ekvivalentna krutost se računa kao:

$$\frac{1}{c^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}$$

- Recipročna vrednost evivalentne krutosti jednaka je zbiru recipročnih vrednosti krutosti pojedinih opruga.



# Slobodne vibracije sa prigušenjem



# Slobodne vibracije sa prigušenjem

- Realni sistemi imaju određeno prugušenje koje dovodi do smanjenja amplitude oscilovanja i postepenog prestanka kretanja sistema - nestajanja oscilacija.

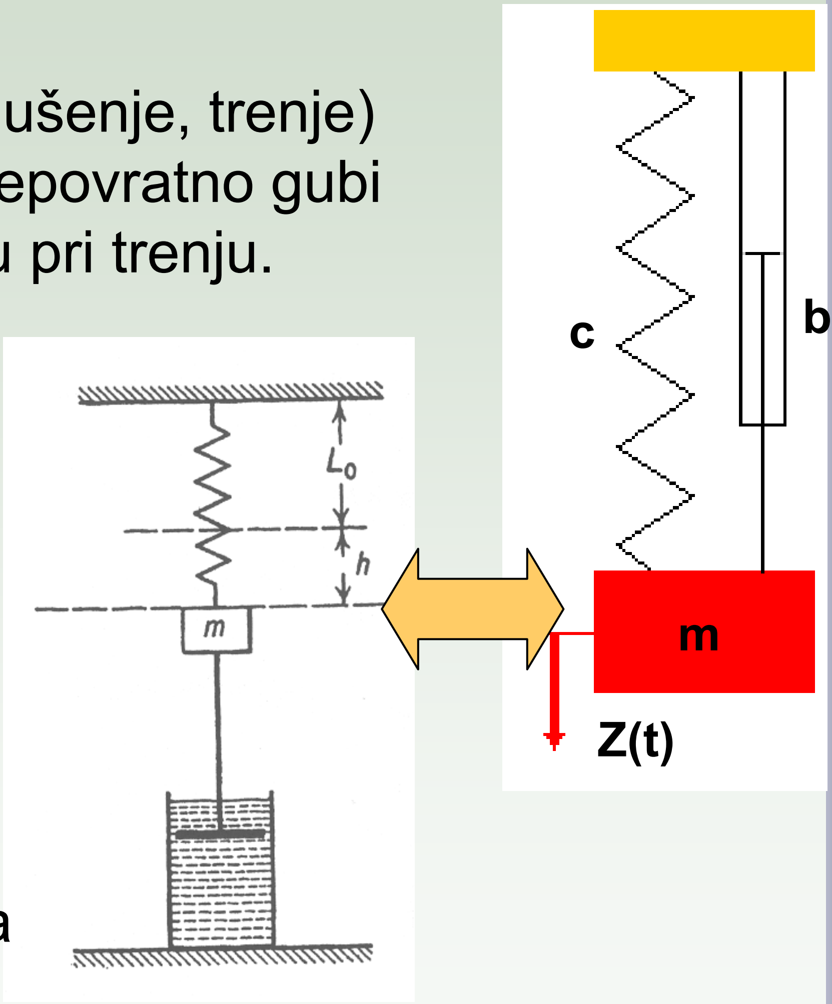
- Mehanizmi prigušenja (viskozno prigušenje, trenje) uzrokuju da se vibraciona energija nepovratno gubi npr. pretvaranjem u toplotnu energiju pri trenju.

- Mehanički sistem je nešto komplikovaniji – sadrži prigušivač koji smanjuje brzinu kretanja sistema masa/opruga.

- Sila viskoznog prigušenja je proporcionalna brzini:

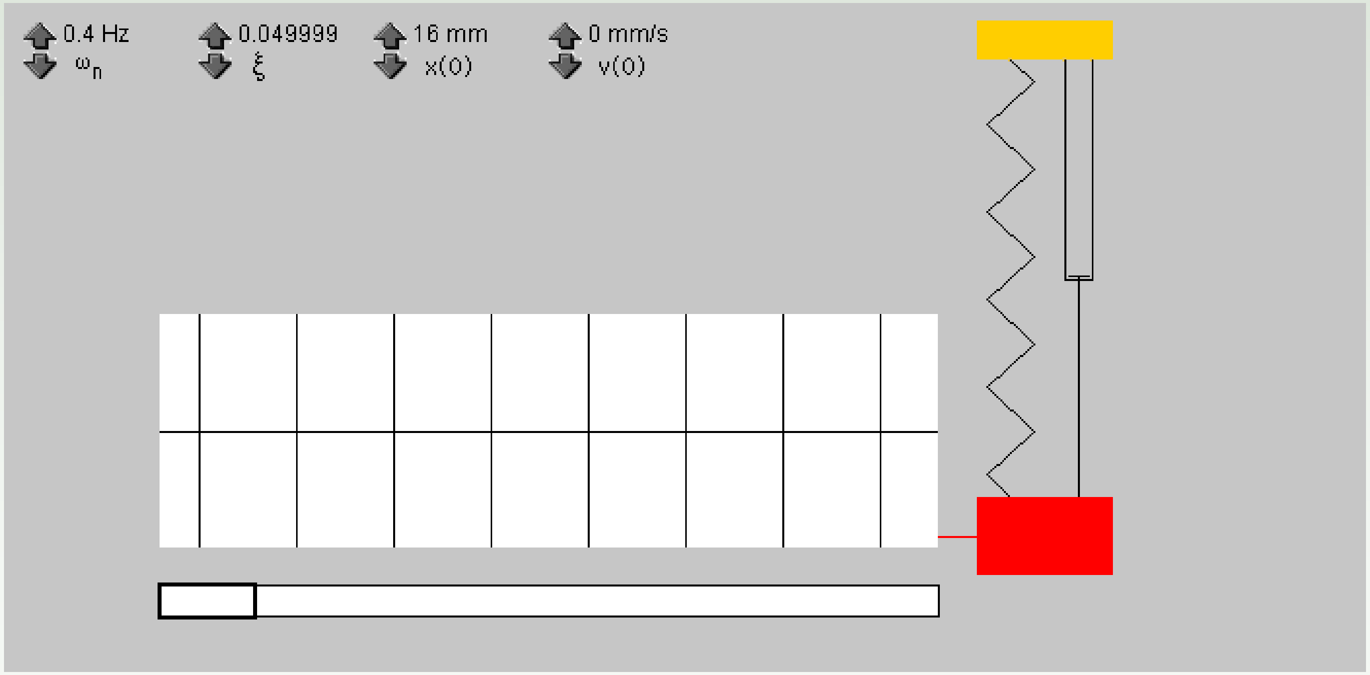
$$P = b\dot{z}(t)$$

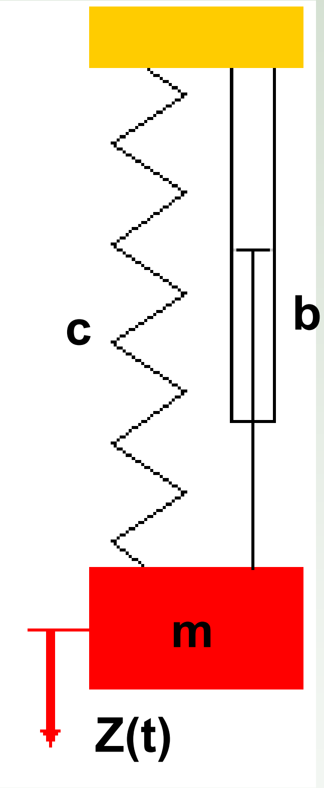
b – konstanta prigušenja [Nm/s]



# Slobodne vibracije sa prigušenjem

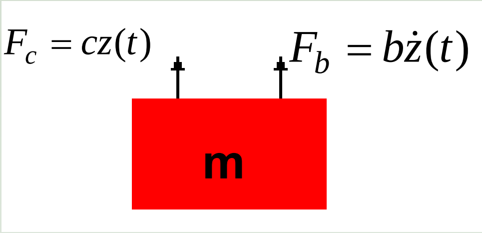
- Oscilator sa prigušenjem se kreće samo u jednom pravcu - z.
- Sistem sa jednim stepenom slobode čije se kretanje može opisati samo jednom koordinatom -z.

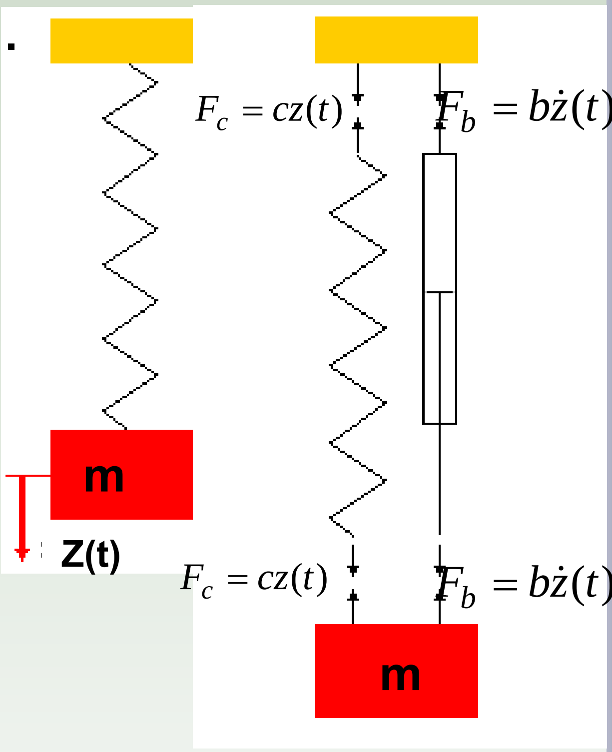


# Slobodne vibracije sa prigušenjem (+)

- Na telo mase m deluju sile Fc i Fb istih vrednosti kao sile na krajevima opruge i viskoznog prigušivača.




- Primenom II Njutnovog zakona (*F* = ma) dobija se jednačina kretanja:

$$m\ddot{z}(t) = -cz(t) - b\dot{z}(t)$$

- Kada se telo kreće na dole, vektor ubrzanja je takođe usmeren na dole – u pravcu z-ose. Sila $F_c$ i $F_b$ koje deluju na masu usmerene su u suprotnom smeru – otuda znak minus.

# Slobodne vibracije sa prigušenjem (+)

- Jednačina kretanja se može napisati u obliku:

$$m\ddot{z}(t) + b\dot{z}(t) + cz(t) = 0 \Big| : m$$

$$\ddot{z}(t) + \frac{b}{m}\dot{z}(t) + \frac{c}{m}z(t) = 0$$

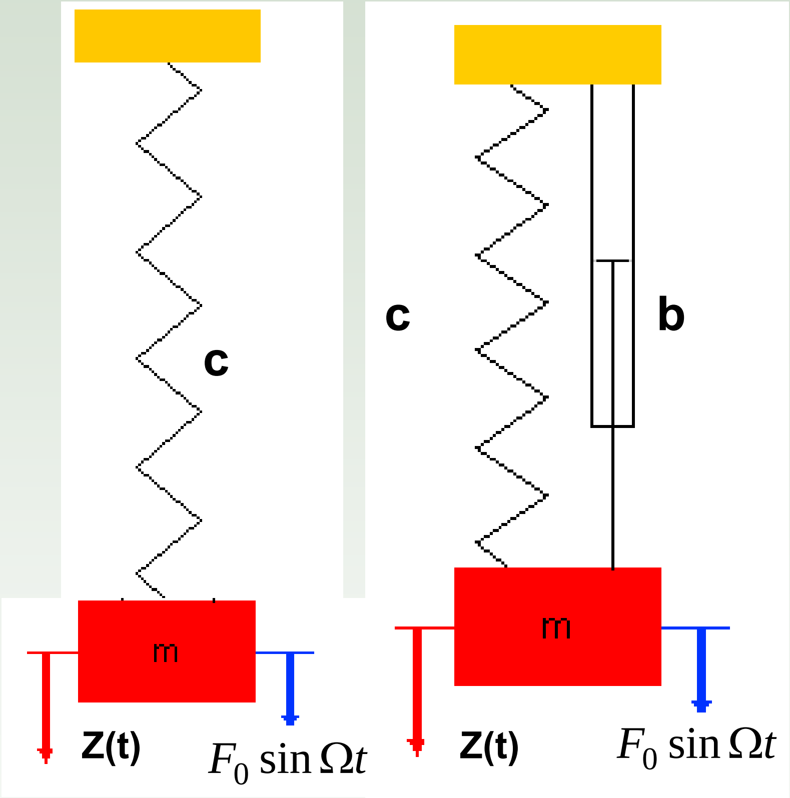
**Uvođenjem smena:**

$$\frac{c}{m} = \omega^2 \qquad \frac{b}{m} = 2\delta$$

$$\boxed{\ddot{z}(t) + 2\delta\,\dot{z}(t) + \omega^2 z(t) = 0}$$

gde je: δ – koeficijent gušenja.

# Prinudne vibracije



# Prinudne vibracije

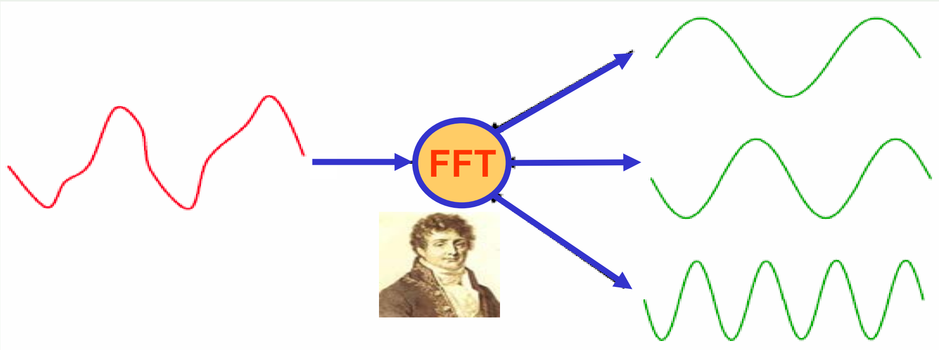


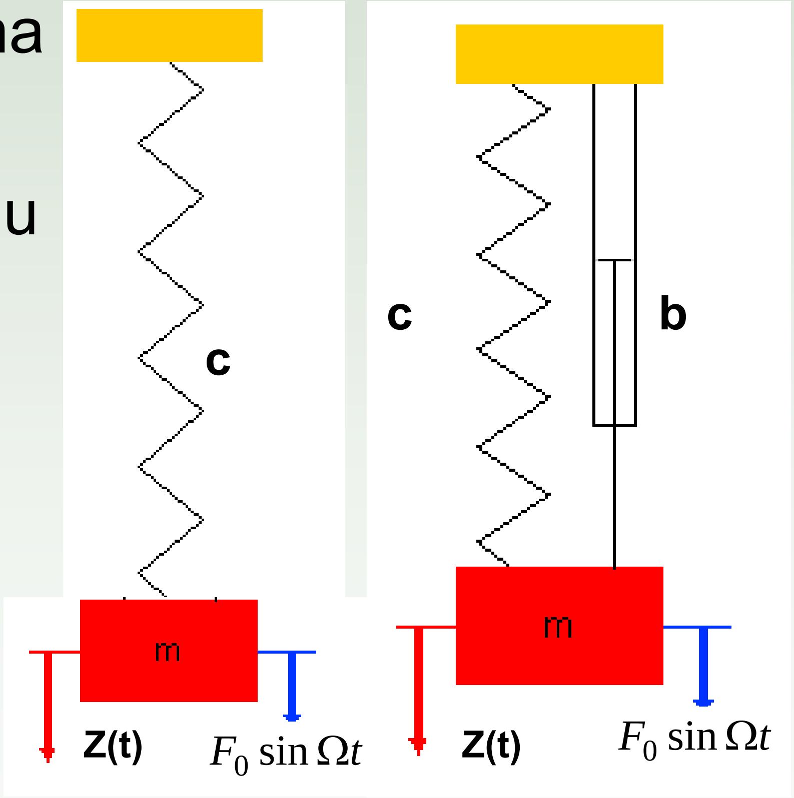
- Ako na mehanički sistem deluje neka spoljašnja sila nastaju prinudne vibracije koje mogu biti:

  prinudne neprigušene vibracije

  prinudne prigušene vibracije

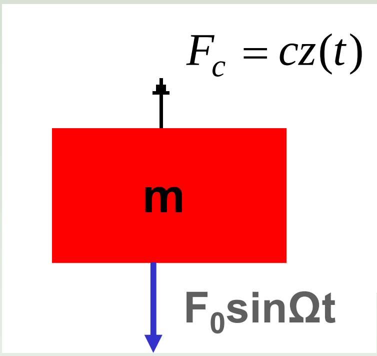
- U inženjerskim sistemima pobudna sila nije uvek harmonijska.
- Složeni periodični siganali se mogu predstaviti kao zbir prostih, harmonijskih signala.



# Prinudne neprigušene vibracije

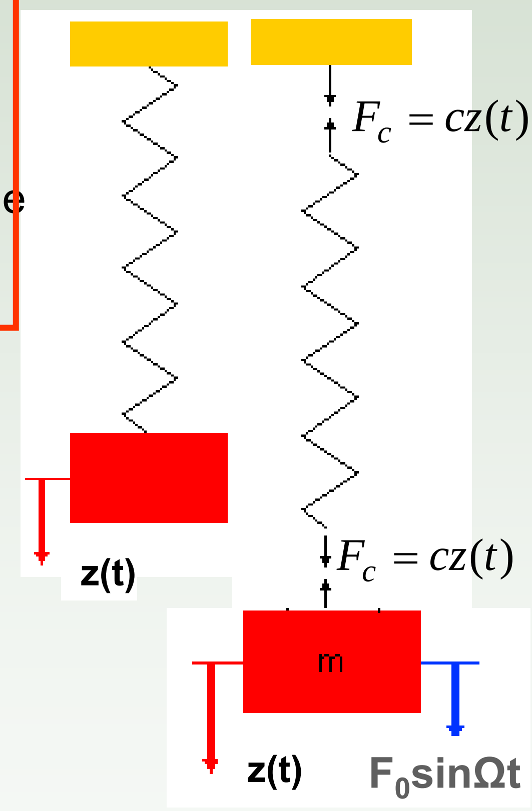
- Na sistem masa/opruga deluje poremećajna (prinudna) sila harmonijskog karaktera u pravcu z-ose.
- Dijagram sila koje deluju na masu m prikazan je na slici.




Prinudna (poremećajna) sila

$$F_0 \sin \Omega t$$

gde je: Ω - kružna frekvencija prinudne sile ili prinudna frekvencija
F - amplirtuda prinudne sile




- Poremećajna sila izvodi telo iz ravnotežnog kretanja za z(t).
- Primenom II Njutnovog zakona formira se jednačina kretanja:

$$m\ddot{z}(t) = F_0 \sin \Omega t - cz(t)$$

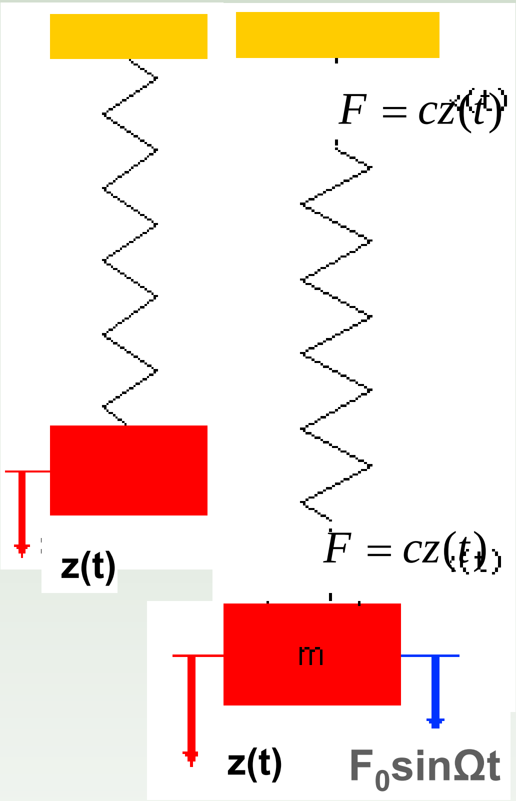
# Prinudne neprigušene vibracije



- Jednačina kretanja se može predstaviti u obliku:

$$m\ddot{z}(t) + cz(t) = F_0 \sin \Omega t \Big| : m$$

$$\ddot{z}(t) + \frac{c}{m} z(t) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$




**ω - sopstvena kružna frekvencija**

$$\ddot{z}(t) + \omega^2 z(t) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

# Prinudne neprigušene vibracije

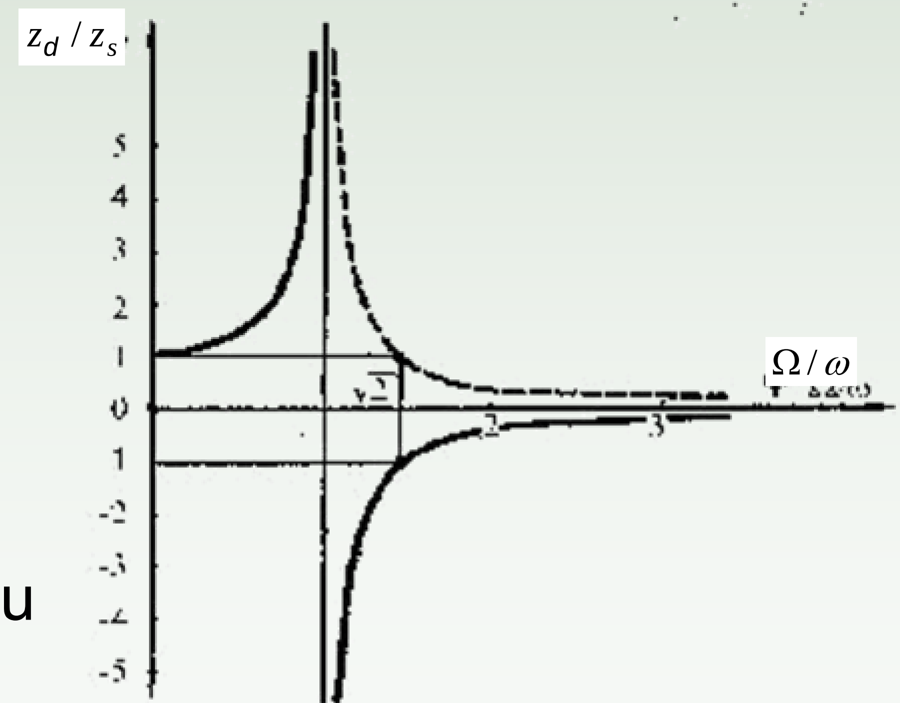
- U statičkom režimu, kada je sila konstantna (Ω=0) telo osciluje oko statičkog ugiba usled dejstva konstantne sile F.

$$\boxed{z_s = \frac{F_0}{c}}$$

- U dinamičkom režimu amplituda raste i menja se po zakonu:

$$z_d = \frac{z_s}{1-\left(\Omega/\omega\right)^2}$$

- Amplituda značajno raste u području oko sopstvene frekvencije koje se naziva rezonantno područje.
- Odnos prinudne i sopstvene frekvencije određuje amplitudu prinudnih vibracija.



# Prinudne neprigušene vibracije

Ako bi prinudna sila dejstvovala ***statički***, : amplituda prinudnog kretanja bi bila:

$$z_s = \frac{F}{c} = \frac{hm}{m\omega^2} = \frac{h}{\omega^2}$$

Međutim, dejstvuje li sila dinamički, amplituda će biti:

$$z_d = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{h}{\omega^2\left(1-\psi^2\right)} = \frac{z_s}{1-\psi^2}$$

Odnos amplituda $z_d$ i $z_s$, predstavlja ***dinamički faktor pojačanja*** ili množilac rezonanse (*magnification factor*)

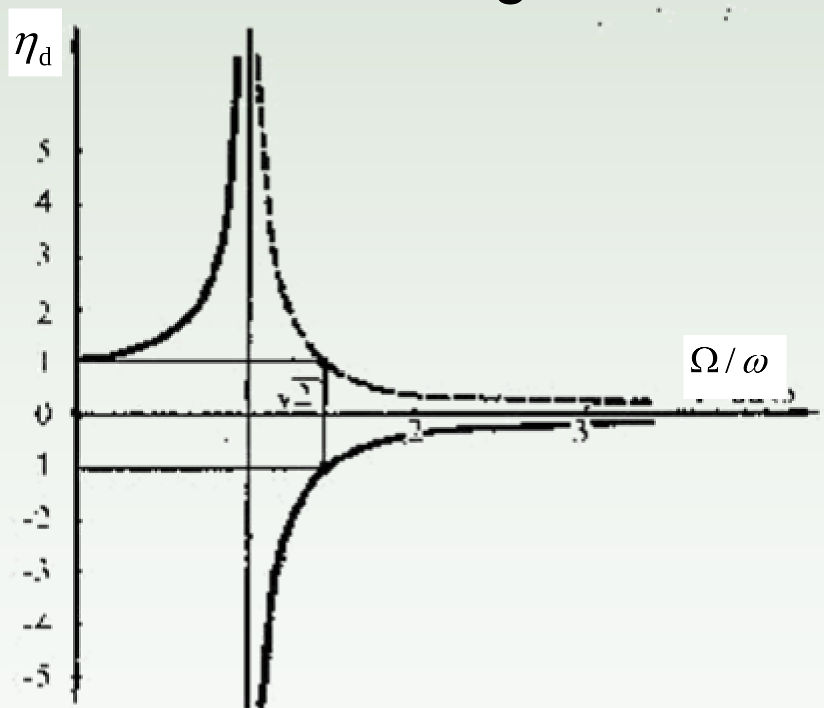
$$\eta_d = \frac{z_d}{z_s} = \frac{1}{1-\psi^2}$$

# Prinudne neprigušene vibracije

- **Normalizovana učestanost:**

$$\psi = \frac{\Omega}{\omega}$$

- Kada je prinudna učestanost mnogo manja od sopstvene amplituda prinudnih vibracija je bliska statičkom ugibu.




- U području rezonanse amplituda značajno raste.

- Kada je prinudna učestanost mnogo veća od sopstvene praktično prinudne vibracije ne postoje.

# Rezonansa

- Ako se frekvencija pobude poklopi sa sopstvenom frekvencijom sistema dolazi do rezonanse i opasnih vibracija.

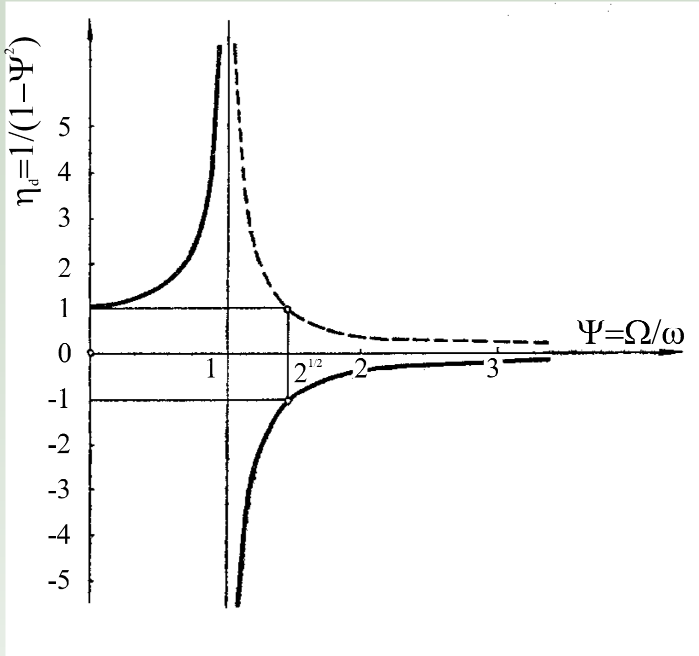
Kada je kružna frekvencija poremećajne sile

$$\Omega \approx 0$$

odnosno mnogo manja od kružne frekvencije slobodne oscilacije

$\Omega << \omega$

amplituda oscilacije je bliska ili jednaka amplitudi pri statičkom delovanju sile $z_s$.



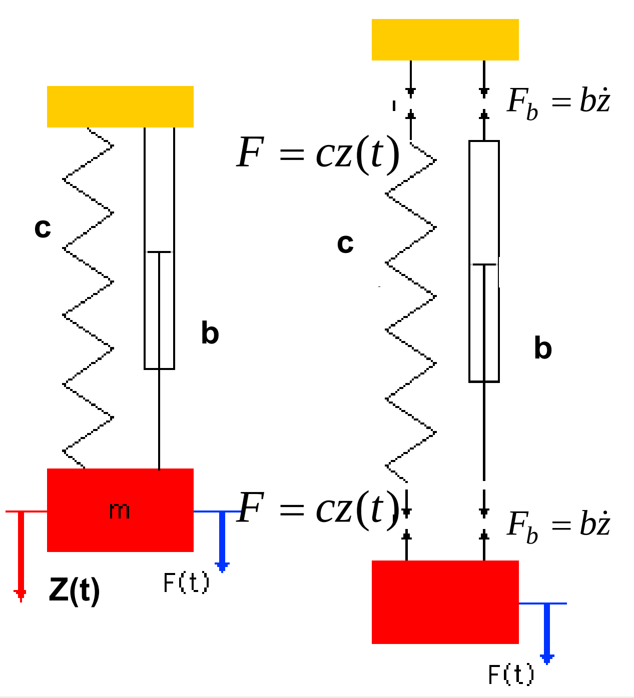

U slučaju kada je: $\Omega = \omega$ amplituda prinudniih oscilacija beskonačno raste. Ova se pojava naziva *rezonansa*.

Slučajevi u kojima je $\Omega >> \omega$ , ampituda prinudnih oscilacija brzo opada, tako da da prinudne oscilacije praktično ne postoje.

Ovaj zaključak ima praktičan značaj, jer ukazuje na mogućnost da se prinudne oscilacije i pored dejstva sile mogu eliminisati.

# Prinudne prigušene vibracije

- U statičkom ravnotežnom položaju kada je opruga rastegnuta za vrednost statičkog ugiba telo se ne kreće tako da na njega ne deluje sila prigušenja.



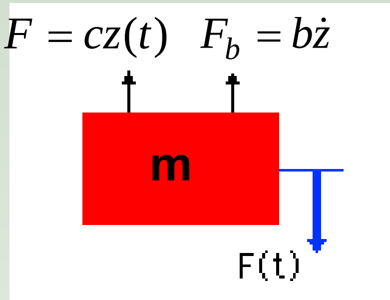

- Kada se opruga istegne za z(t) pod dejstvom sile F(t) na krajevima opruge deluju jednake sile elastičnosti Fc suprotnog smera.

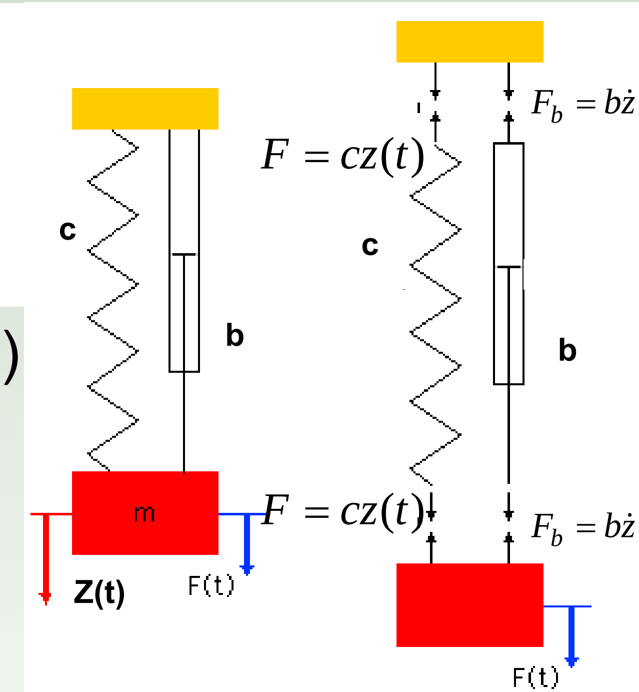
- Na krajevima viskoznog prigušivača deluju jednake sile prigušenja Fb suprotnog smera.

- Prema III Njutnovom zakonu za svaku silu postoji sila reakcije koja deluje u suprotnom smeru.

# Prinudne prigušene vibracije

- Na telo mase m deluju sile Fc i Fb istih vrednosti kao sile na krajevima opruge i viskoznog prigušivača, kao i prinudna sila F(t) u suprotnom smeru.




- Primenom II Njutnovog zakona (F=ma) dobija se jednačina kretanja:

$$m\ddot{z}(t)=F(t)-b\dot{z}(t)-cz(t)$$

koja se može napisati u obliku:

$$m\ddot{z}(t)+b\dot{z}(t)+cz(t)=F(t)\,\Big|:m$$

$$\ddot{z}(t)+\frac{b}{m}\dot{z}(t)+\frac{c}{m}z(t)=\frac{F(t)}{m}$$

$$\ddot{z}(t)+2\delta\dot{z}(t)+\omega^2 z(t)=\frac{F(t)}{m}$$

# Prinudne prigušene vibracije (+)

$$\ddot{z}(t) + 2\delta\dot{z}(t) + \omega^2 z(t) = \frac{F(t)}{m}$$

- Rešenje ima dva dela:

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t)$$

$z_h(t)$ - rešenje homogene dif. jednačine kada je F(t)=0,

slobodne prigušene vibracije

$z_h(t)$ - partikularno rešenje nehomogene dif. jednačine

prinudne vibracije

# Prinudne prigušene vibracije



- Animacija

**$\omega_n$ – sopstvena frekvencija**

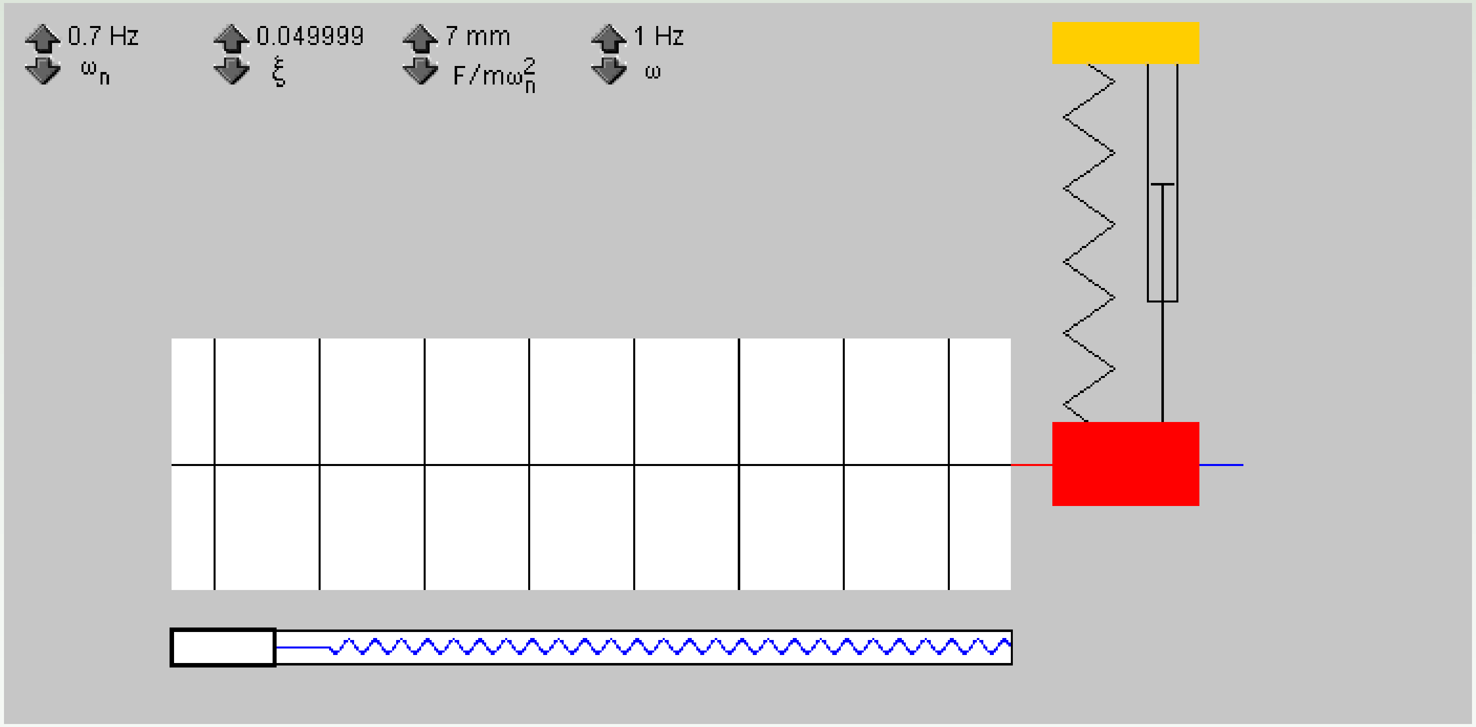
**$\xi$– odnos prigušenja**

**$\omega$ – prinudna frekvencija ($\Omega$)**

**F – prinudna sila**

**—— prinudna sila**

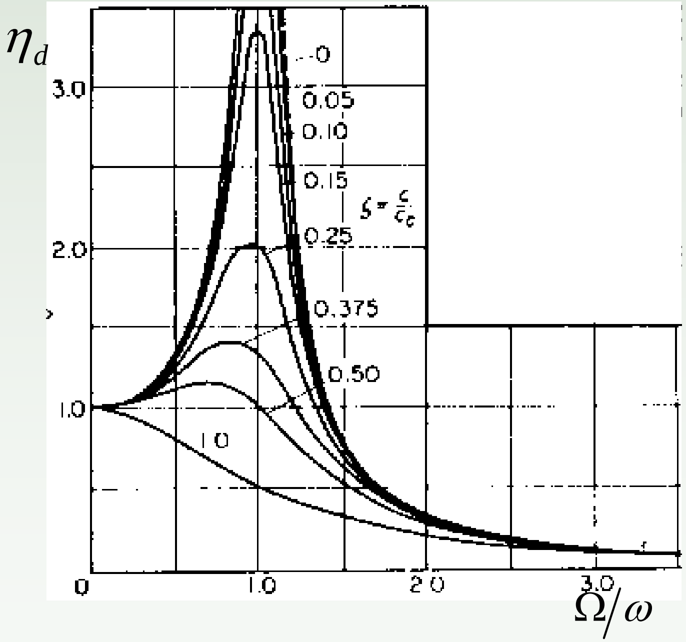
**—— pomeraj**

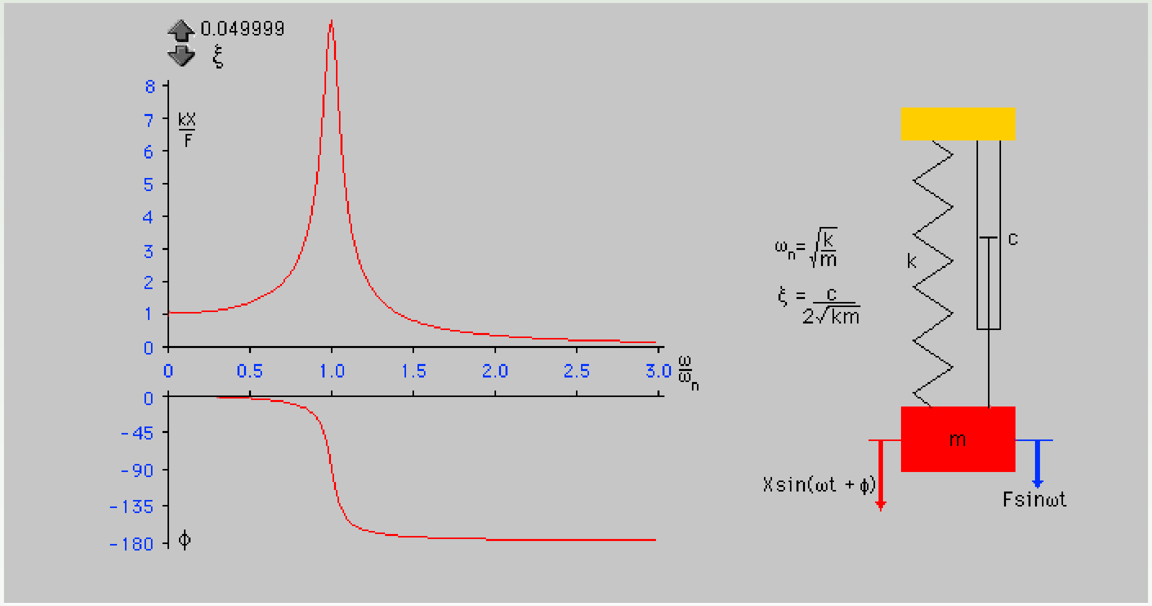


# Prinudne prigušene vibracije

Odnos amplitude prinudnih vibracija u dinamičkom i statičkom režimu definiše dinamički faktor pojačanja:

$$\eta_d = \frac{z_d}{z_s} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\psi^2\right]^2 + 4\psi^2\delta^2}}$$



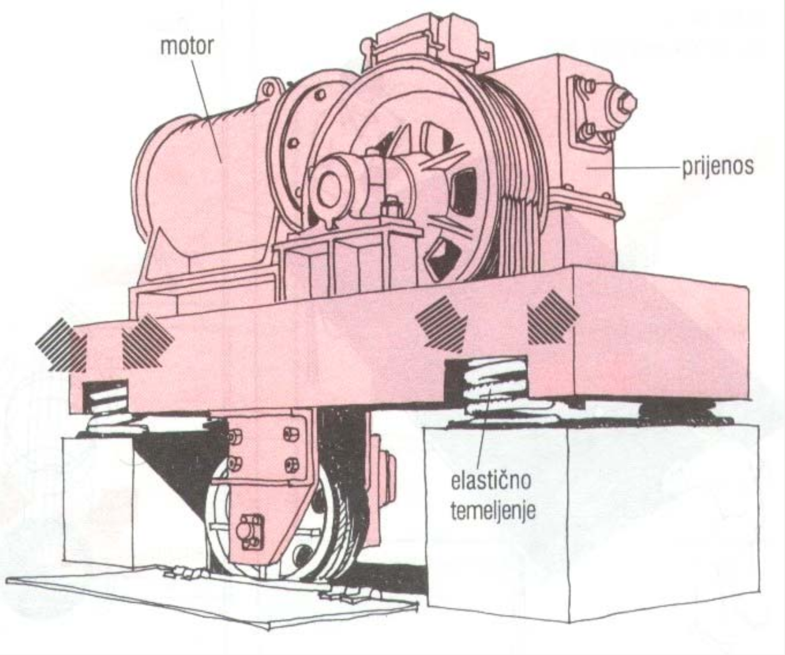



# Osnovni principi izolacije

# Osnovni principi izolacije



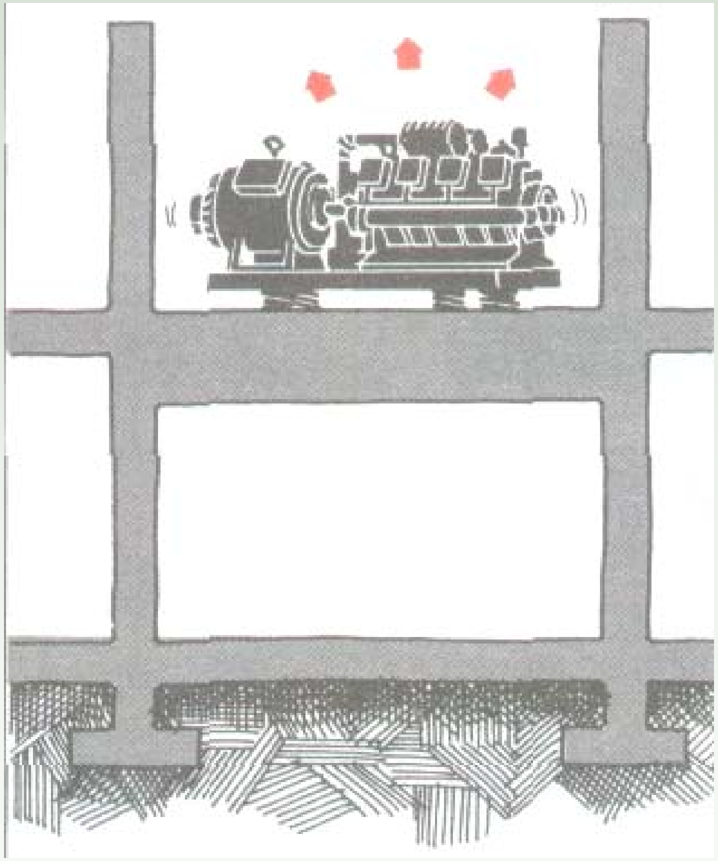
- Da bi se smanjilo prenošenje mehaničke energije sa mehaničkog sistema koji osciluje na postolje gde je mašina oslonjena potrebno je smanjiti dinamički faktor pojačanja.
- U tom cilju ugrađuju se antivibracioni materijali i elementi između mašine i postolja - gumeni podmetači, opruge i sl.
- Ugrađenim elemenom potrebno je smanjiti prenos vibracija sa izvora na podlogu.

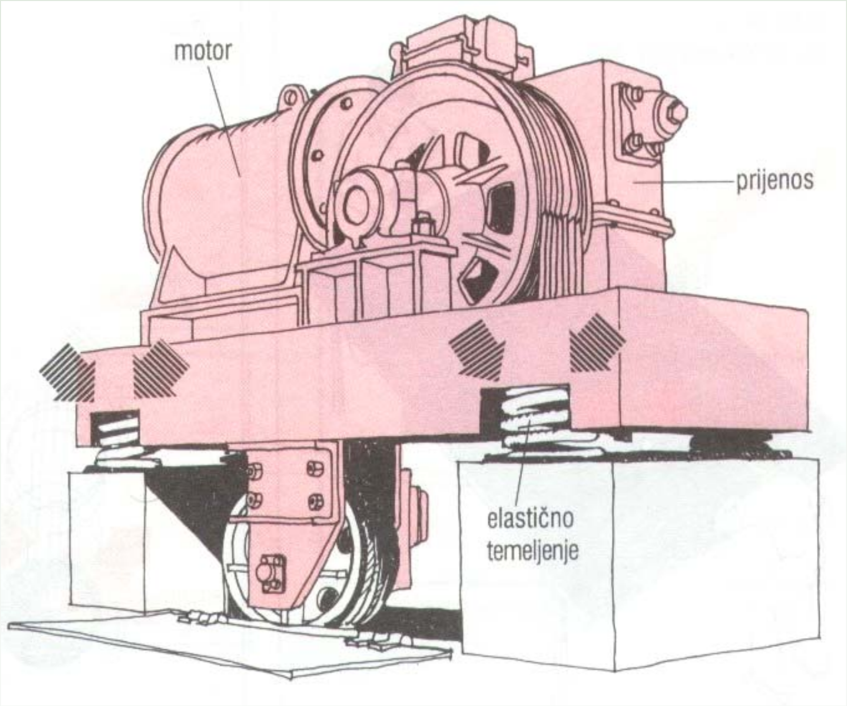


# Osnovni principi izolacije

- Ponekad mašina može biti kruto vezana za velike betonske blokove koji se tada zajedno sa mašinom izoluju.
- U ovom slučaju se povećava masa sistema što dozvoljava da krutost opruge bude veća a sopstvena frekvencija ista.

$$\boxed{f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}}$$





# Osnovni principi izolacije

- Rezultat primene antivibracionih elemenata ili izolatora vibracija može se vrednovati preko:
  - **koeficijenta prenošenja** koji predstavlja odnos istih fizičkih veličina najčešće sila - odnos prenete i pobudne sile

$$p = \frac{F_{pr}}{F} = \frac{\text{preneta sila}}{\text{pobudna sila}}$$

  - **efikasnosti izolacije** koja izražava efektivnost izolacionog sistema u prcentima

$$e = (1 - p) \times 100\%$$

# Osnovni principi izolacije



- Mogu se razlikovati tri slučaja oslanjanja mašinskog sistema na podlogu (fundament, oslonac):
  - Direktna (kruta) veza mašine mase m sa podlogom
  - Mašina mase m je preko sistema opruga vezana sa podlogom
  - Mašina mase m je vezana sa podlogom preko izolaciong sistema koga karakteriše pored krutosti i prigušenje

# Osnovni principi izolacije

Izolovanje vibracija po svojoj suštini podrazumeva izbor sistema oslanjanja (veze) izvora sa podlogom (temelj mašine, noseća konstrukcija).

U ovom slučaju, element sistema oslanjanja je specijalni deformabilni element čija je krutost srazmerno manja od krutosti vibrozaštitnog sistema.

Osnovna funkcija vibrozaštitnih elemenata je smanjenje prenosa vibracija sa izvora na podlogu – vibrozaštitni sistem.

Rezultat izolacije vibracija, ili efikasnost, vrednuje se koeficijentom koji se naziva:

***Prenosivost*** - ***transmissibility***

$$\frac{z_d}{z_s} = \frac{z_d}{F_0 / c} = \frac{z_d c}{F_0} = p = \frac{F_k}{F_0} = \frac{F_{pr}}{F_{po}}$$

gde je:

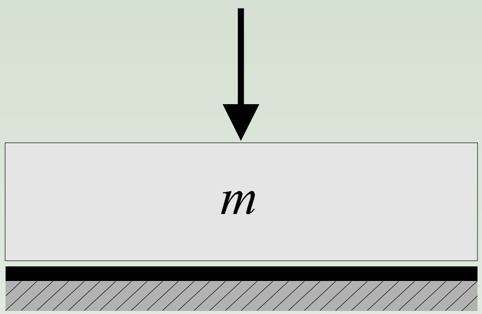
*Fpr* – Preneta sila (*Fk*)

*Fpo* – Poremećajna sila ($F_0$)

*p – prenosivost*

## 1. Prvi slučaj

$$F(t) = F_0 \sin\Omega t$$




***Kruto oslanjanje izvora vibracija na podlogu***

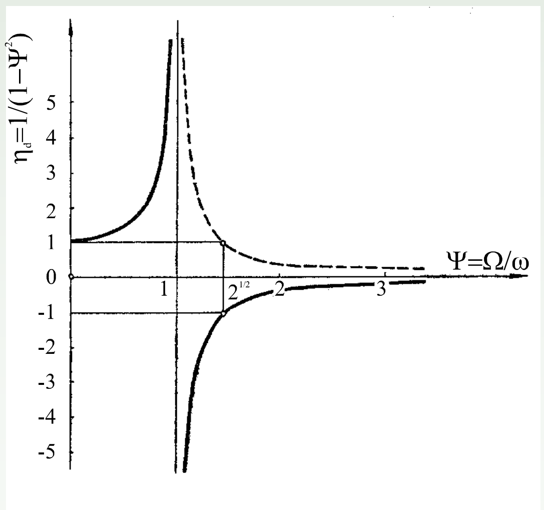
$$c = \infty$$

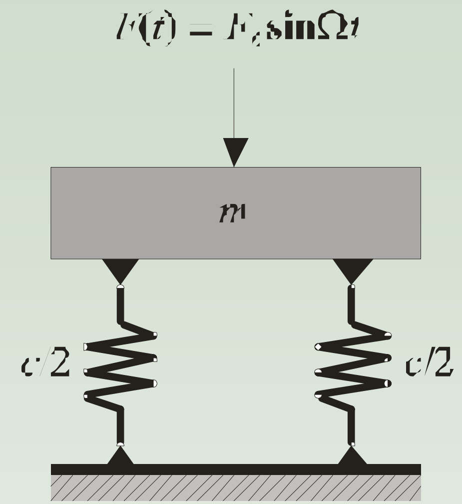
***p* = 1.**

## 2. Drugi slučaj

$$p = \frac{1}{1-\psi^2}$$

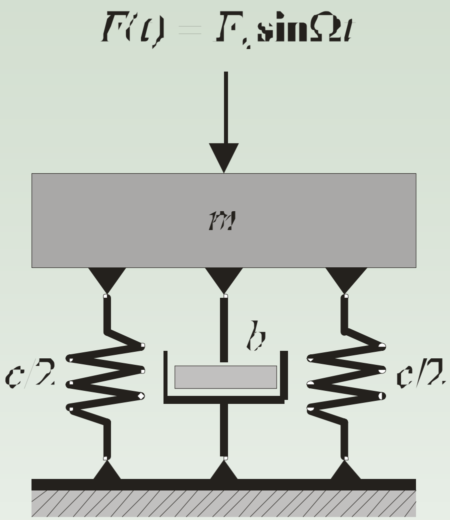
**Funkcionalna zavisnost prenosivosti i normalizovane frekvencije *p,(ψ)* identična je zavisnosti $\eta_d$*,(ψ)***



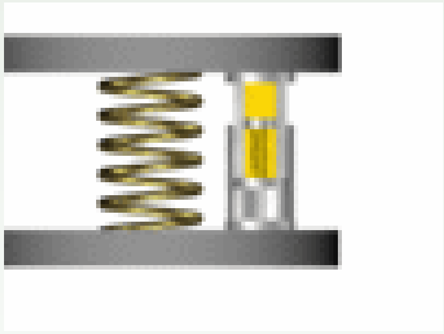

***Model oslanjanja izvora vibracija na podlogu preko sistema opruga***

## 3. Treći slučaj




**Preneta sila u ovom slučaju je rezultanta sile u opruzi i sile prigušenja. Između ove dve sile postoji fazna razlika od π/2, pa je preneta sila, kao njihova rezultanta, jednaka njihovom vektorskom zbiru.**

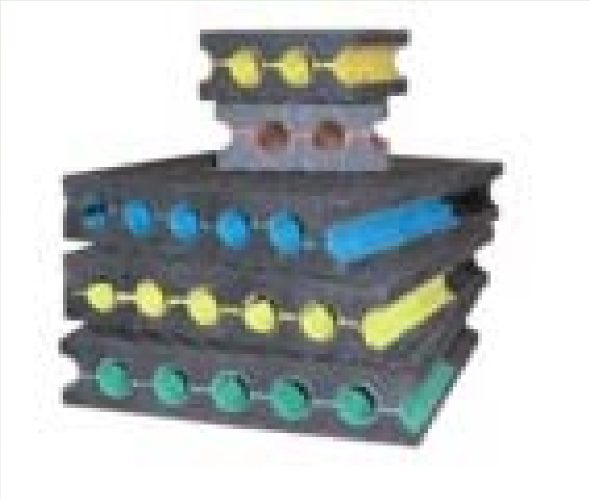
$$F_{pr} = z_0 \sqrt{c^2 + (b\omega)^2}$$

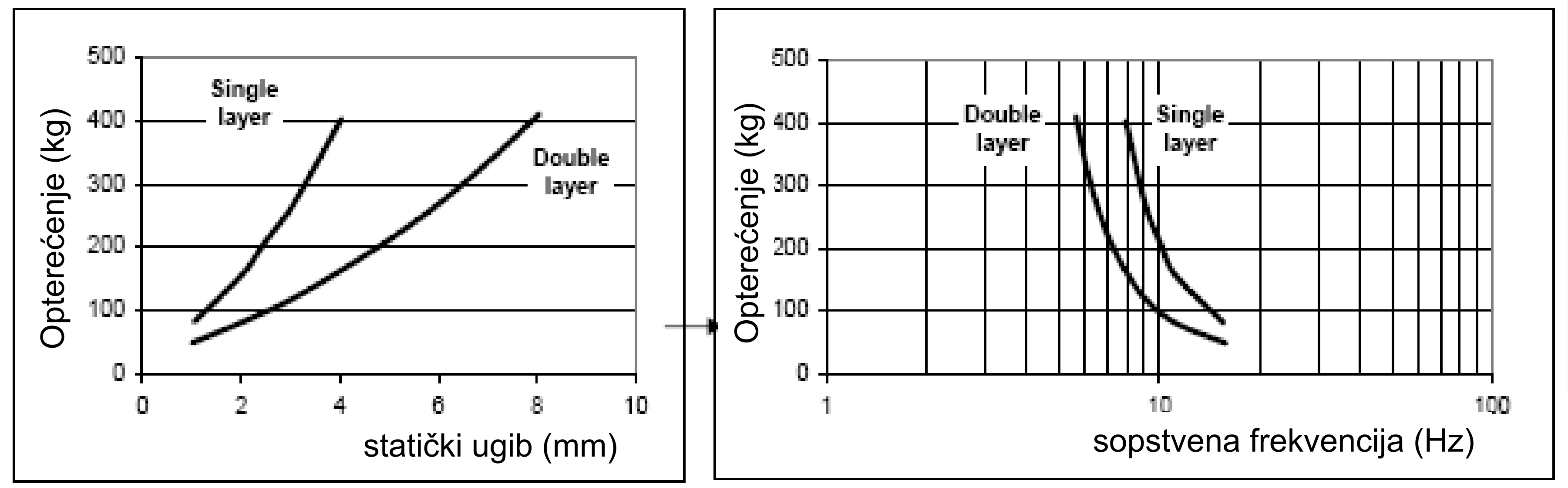


**Prenosivost u ovom slučaju biće jednaka**

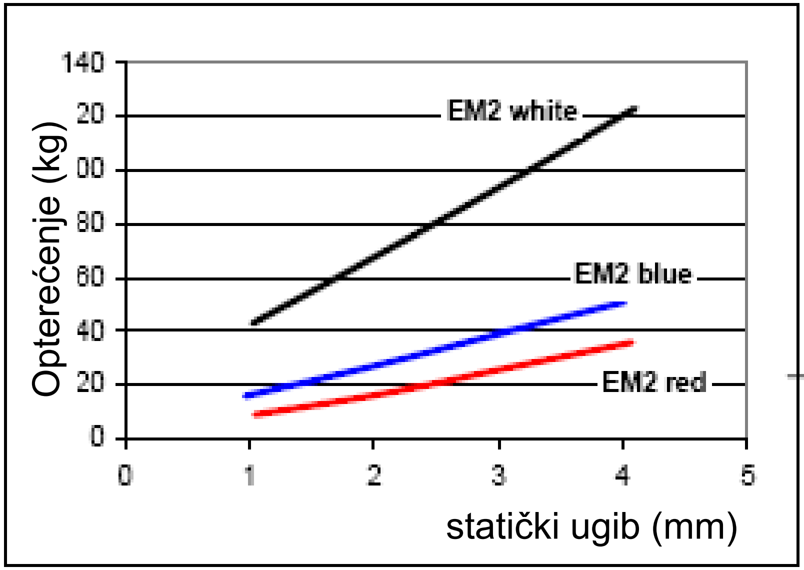
$$p = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\psi)^2}{(1 - \psi^2)^2 + (2\xi\psi)^2}}$$

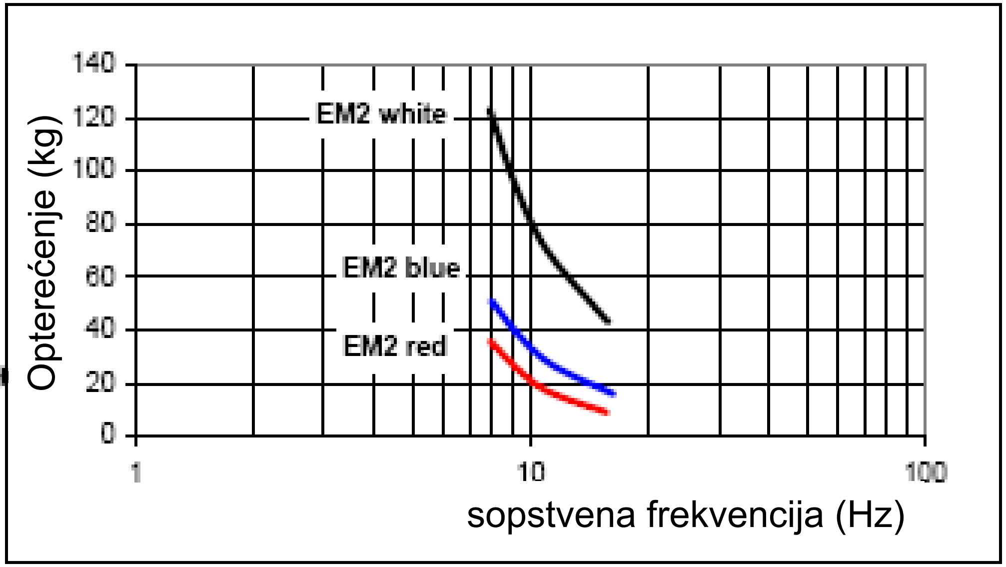
# Antivibracioni elastični podmetači





# Antivibraciona elastična podloga



# Antivibracioni elastična podloga