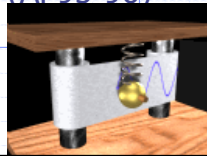


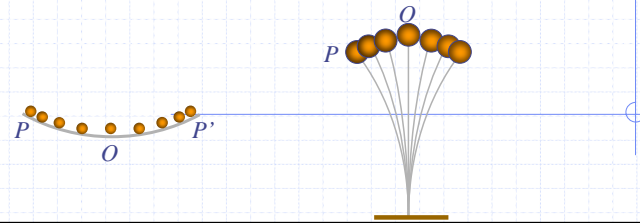
Oscilatorno kretanje

- ◆ Periodično kretanje i harmonijske oscilacije (AP85-87)
- ◆ Oscilovanje tela obešenog o elastičnu oprugu (AP87-91)
- ◆ Matematičko klatno (AP91-93)
- ◆ Prigušene harmonijske oscilacije (AP93-94)
- ◆ Prinudne oscilacije i rezonansa (AP95-96)



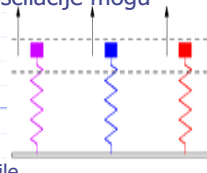
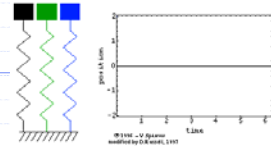
Oscilatorno kretanje

- ◆ Periodično kretanje. Oscilacije.
 - Kretanje koje se ponavlja u određenim vremenskim intervalima naziva se periodično kretanje.
 - Periodično kretanje koje se ponavlja na isti način naziva se oscilatorno kretanje, a proces oscilovanje.
 - Oscilacija je jedan ciklus oscilatornog kretanja posle čega se kretanje ponavlja.



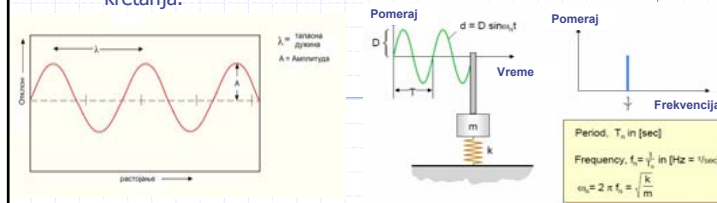
Oscilatorno kretanje

- ◆ Periodično kretanje. Oscilacije.
 - Oblici mehaničkih kretanja:
 - ◆ mehanička;
 - ◆ elektromagnetska;
 - ◆ elektromehanička.
 - Telo ili sistem koji vrši oscilatorno kretanje naziva se oscilator.
 - U zavisnosti od prisustva spoljašnjih sila oscilacije mogu biti:
 - ◆ slobodne ili sopstvene - izvodi ih oscilatorni sistem ako se izvede iz ravnotežnog položaja i prepusti sam sebi;
 - ◆ prigušene; i
 - ◆ prinudne pod dejstvom spoljašnje periodične sile.



Oscilatorno kretanje

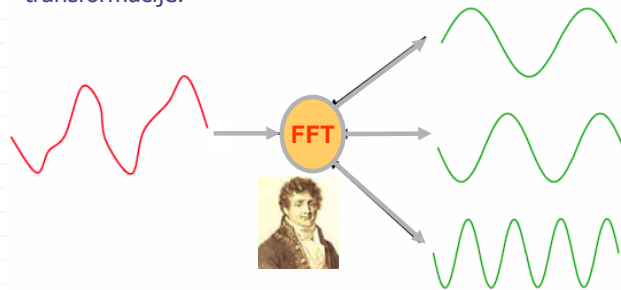
- ◆ Periodično kretanje. Oscilacije.
 - Veličine kod periodičnog kretanja:
 - ◆ Period oscilovanja predstavlja vreme koje je potrebno da sistem izvrši jednu punu oscilaciju.
 - ◆ Frekvencija oscilovanja predstavlja broj izvršenih oscilacija u jedinici vremena.
 - ◆ Elongacija (pomeraj) predstavlja rastojanje materijalne tačke ili tela od ravnotežnog položaja.
 - ◆ Amplituda predstavlja maksimalni pomeraj kod prostoperiodičnog kretanja.



Oscilatorno kretanje

◆ Harmonijske oscilacije.

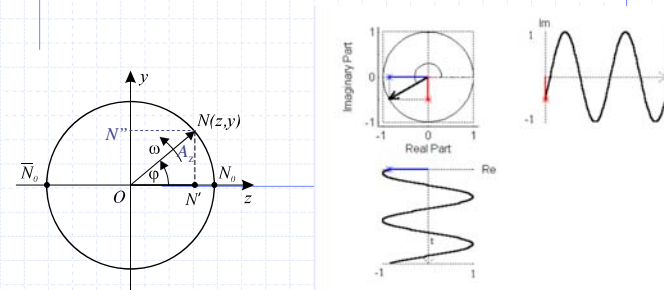
- Najprostiji oblik oscilovanja je harmonijsko oscilovanje.
- Mnoge oscilacije u prirodi su harmonijske ili se mogu predstaviti superpozicijom harmonijskih oscilacija primenom matematičkog aparata - Furijeove transformacije.



Oscilatorno kretanje

◆ Harmonijske oscilacije.

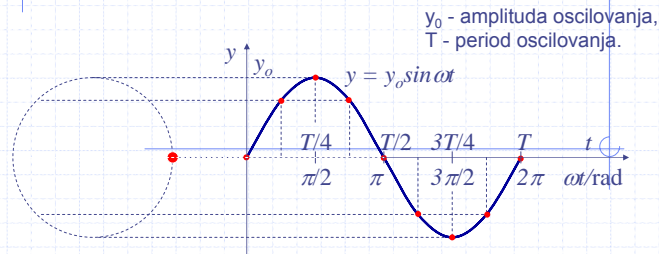
- Kretanje materijalne tačke N po krugu poluprečnika ON.
 - Tačka $N(z,y)$ kreće po krugu ugaonom brzinom ω ;
 - Horizontalna projekcija N' kreće po horizontalnoj osi;
 - Vertikalna projekcija N'' kreće se po vertikalnoj osi.



Oscilatorno kretanje

◆ Harmonijske oscilacije.

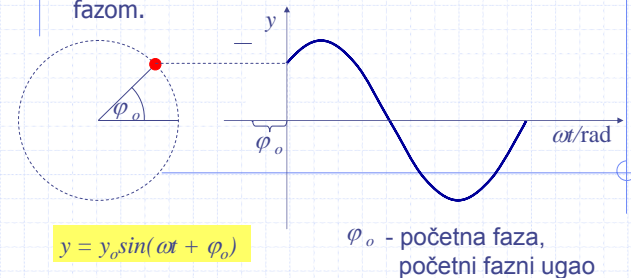
- Kretanje materijalne tačke N po krugu poluprečnika ON.
 - Obe projekcije izvide harmonijsko kretanje.



Oscilatorno kretanje

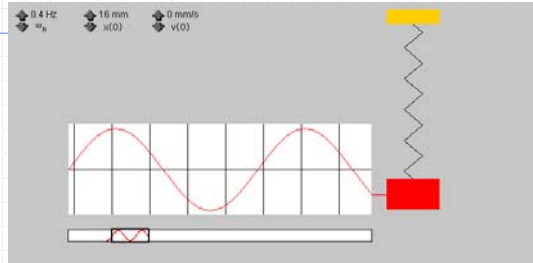
◆ Harmonijske oscilacije.

- Kretanje materijalne tačke N po krugu poluprečnika ON – primer harmonijskih oscilacija, odnosno oscilatornog kretanja čija se elongacija menja po prostoperiodičom zakonu.
 - Harmonijsko kretanje može da bude sa početnom fazom.



Oscilatorno kretanje

- ◆ Telo obešeno o elastičnu oprugu.
 - Vertikalni harmonijski oscilator - telo mase m obešeno o oprugu izvodi slobodne oscilacije nakon izvođenja iz ravnotežnog položaja.



Oscilatorno kretanje

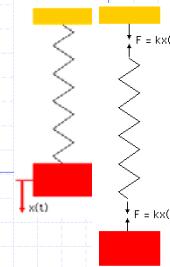
- ◆ Telo obešeno o elastičnu oprugu.
 - Kada se telo pomeri u odnosu na ravnotežni položaj za $x(t)$:
 - ♦ opruga se rasteže takođe za $x(t)$,
 - ♦ na krajevima opruge deluju jednake sile suprotnog smera - elastična sila koje je prema Hukovom zakonu:

$$F = kx(t) \quad k - \text{konstanta proporcionalnosti, krutost opruge}$$

- ♦ Prema III Njutnovom zakonu za svaku silu postoji sila reakcije koja deluje u suprotnom smeru:

$$F = kx(t)$$

- ♦ Telo se kreće pod dejstvom elastične sile opruge u pravcu x -ose.



Oscilatorno kretanje

- ◆ Telo obešeno o elastičnu oprugu.
 - Prema II Njutnovom zakonu sila koje deluje na telo:

$$F = m\ddot{x}(t)$$
 - Izjednačavanjem gornjeg izraza za silu sa izrazom za elastičnu silu dobija se diferencijalna jednačina kretanja:

$$m\ddot{x}(t) = -kx$$

- ♦ Znak "-" ukazuje na činjenicu da je elastična sila uvek suprotnog smera smeru kretanja tela.

- Sređivanje gornje jednačine dobija se izraz:

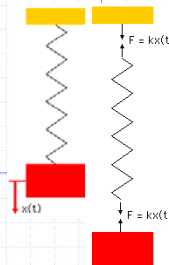
$$m\ddot{x}(t) + kx = 0 \quad | : m$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x = 0$$

ω_0 - sopstvena kružna frekvencija

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Oscilatorno kretanje

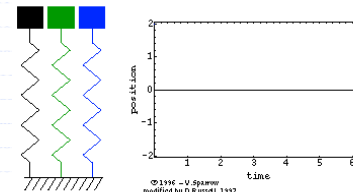
- ◆ Telo obešeno o elastičnu oprugu.
 - Rešavanjem diferencijalne jednačine dobija se jednačina kretanja tela:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

- Telo izvodi harmonijsko oscilovanje sa periodom oscilovanja:

- ♦ što je masa tela veća period oscilovanja je veći.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



Oscilatorno kretanje

◆ Telo obešeno o elastičnu oprugu.

- Kinetička energija tela jednaka je:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

- Potencijalna energija u odnosu na ravnotežni položaj:

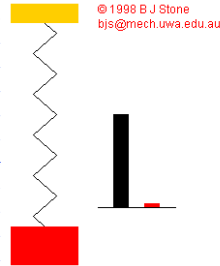
$$E_p = A = \int F dx = \int kx dx = k \frac{x^2}{2}$$

- Za maksimalni pomeraj u odnosu na ravnotežni položaj:

$$E_p = k \frac{A^2}{2}$$

- Ukupna energija je:

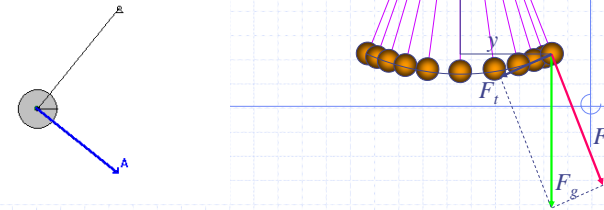
$$E_p = \frac{mv^2}{2} + k \frac{x^2}{2} = k \frac{A^2}{2} = m\omega_0^2 \frac{A^2}{2}$$



Oscilatorno kretanje

◆ Matematičko klatno.

- Materijalna tačka obešena o nerastegljiv konac bez težine.
- Izvođenjem matematičkog klatna iz ravnotežnog položaja:
 - ◆ na klatno deluje težina, čija je tangencijalna komponenta aktivna;
 - ◆ ova sila je uvek usmerena ka ravnotežnom položaju;
 - ◆ klatno ocljuje oko ravnotežnog položaja, naizmenično pretvarajući kinetičku u potencijalnu energiju.



Oscilatorno kretanje

◆ Matematičko klatno.

- Pri rotacionom kretanju na klatno deluje moment sile:

$$M = I \cdot \alpha$$

- ◆ moment inercije:

$$I = ml^2$$

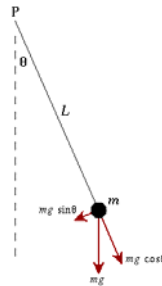
- ◆ ugaono ubrzanje:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- S druge strane, sila $F = mg \sin\theta$ ima krak l u odnosu na osu rotacije, tako da je moment sile:

$$M = -mgl \sin\theta$$

- ◆ Znak "-" ukazuje na činjenicu da moment sile teži da smanji ugao θ .



Oscilatorno kretanje

◆ Matematičko klatno.

- Izjednačavanjem momenata dobija se diferencijalna jednačina kretanja:

$$-mgl \sin\theta = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- Sređivanjem izraza:

$$l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + gl \sin\theta = 0 \quad | : l^2$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

- Za male uglove $\sin\theta \approx \theta$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Oscilatorno kretanje

◆ Matematičko klatno.

- Opšte rešenje diferencijalne jednačine daje jednačinu kretanja:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

- Oscilacije matematičkog klatna su harmonijske sa periodom oscilovanja:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- period oscilovanja ne zavisi od mase klatna;
- zavisi od dužine klatna i gravitacionog ubrzanja.

- Pošto svako klatno ima period oscilovanja koristi se za izradu časovnika.

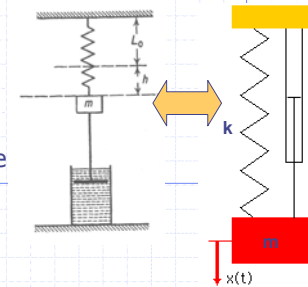


Oscilatorno kretanje

◆ Prigušene harmonijske oscilacije.

- Na oscilatorni sistem veoma često, pored elastične i gravitacione sile, dejstvuju i druge sile (sile trenja).
 - Realni sistemi imaju određeno prigušenje koje dovodi do smanjenja amplitude oscilovanja i postepenog prestanka kretanja sistema - nestajanja oscilacija.

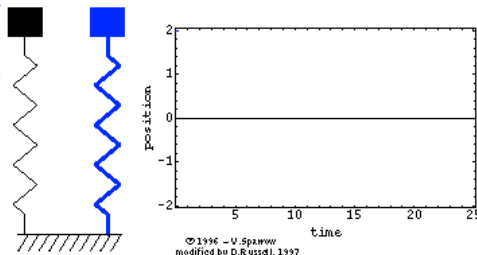
- Mehanizmi prigušenja (viskozno trenje, suvo trenje) uzrokuju da se energija nepovratno gubi npr. pretvaranjem u toplotnu energiju pri trenju.
- Oscilacije koje nastaju u takvim sistemima nazivaju se prigušene harmonijske oscilacije.



Oscilatorno kretanje

◆ Prigušene harmonijske oscilacije.

- Kod sistema u prisustvu trenja amplituda oscilacija će postepeno opadati ka nuli usled trošenja energije oscilatornog sistema na rad savladavanja sila trenja.



Oscilatorno kretanje

◆ Prigušene harmonijske oscilacije.

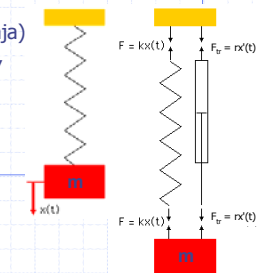
- Kada se telo pomeri u odnosu na ravnotežni položaj za $x(t)$:
 - opruga se rasteže takođe za $x(t)$,
 - na krajevima opruge dejstvuju jednake sile suprotnog smera - elastična sila koje je prema Hukovom zakonu:

$$F = kx(t) \quad \text{— } k \text{ - konstanta proporcionalnosti, krutost opruge}$$

- Javlja se sila prigušenja (viskozno trenje) koja je za male brzine srazmerna brzini, a suprotnog smera od smeru brzine:

$$F_{tr} = r\dot{x}(t)$$

- Sila prigušenja deluje na krajevima prigušivača



Oscilatorno kretanje

◆ Prigušene harmonijske oscilacije..

- Prema III Njutnovom zakonu za svaku silu postoji sila reakcije koja deluje u suprotnom smeru, tako da na telo dejstvuje rezultanta dve sile: $F = kx(t)$ $F_v = r\dot{x}(t)$



- Prema II Njutnovom zakonu rezultanta sila koja dejstvuje na telo saopštava ubrzanje pa je:

$$F = m\ddot{x}(t)$$

- Izjednačavanjem gornjeg izraza za silu sa rezultantom sila dobija se diferencijalna jednačina kretanja:

$$m\ddot{x}(t) = -kx - r\dot{x}$$

- ♦ Znak "-" ukazuje na činjenicu da su elastična sila i sila viskozno trenja uvek suprotnog smera smeru kretanja tela.

Oscilatorno kretanje

◆ Prigušene harmonijske oscilacije.

- Jednačina kretanja se može napisati u obliku:

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad | : m$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{r}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0$$

- ♦ ξ – odnos prigušenja:

$$\xi = \frac{r}{2\sqrt{km}}$$

- Rešenja diferencijalne jednačine zavisi od odnosa prigušenja.

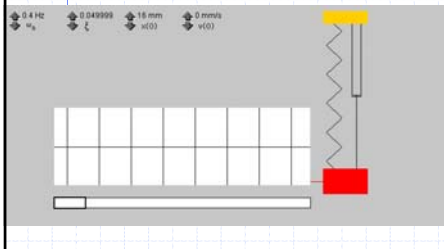
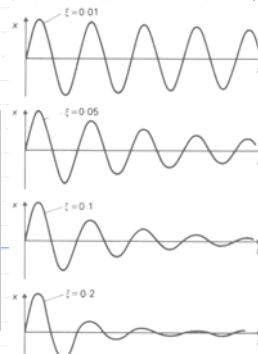
Oscilatorno kretanje

◆ Prigušene harmonijske oscilacije.

- Kada je prigušenje malo javljaju se prigušene periodične oscilacije:

$$\xi < 1, r < 2\sqrt{km}$$

Što je prigušenje veće amplituda brže opada

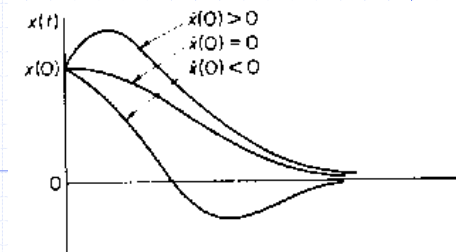


Oscilatorno kretanje

◆ Prigušene harmonijske oscilacije.

- Kada je prigušenje veliko javljaju se prigušene aperiodične (neperiodične) oscilacije, ne javljaju se oscilacije već sistem odmah ide u ravnotežni položaj.

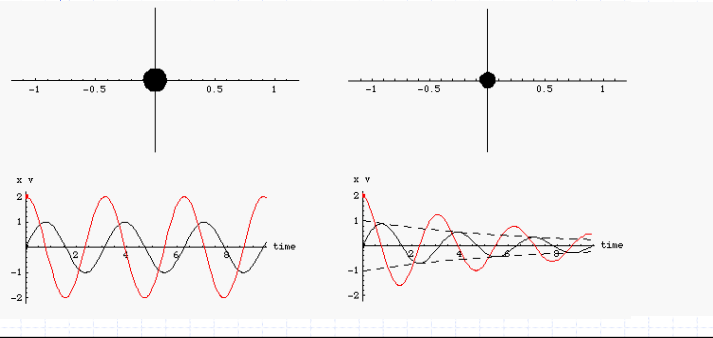
$$\xi \geq 1, r \geq 2\sqrt{km}$$



Oscilatorno kretanje

◆ Prigušene harmonijske oscilacije.

- Kod prigušenih periodičnih oscilacija, period oscilovanja je duži nego kod neprigušenih, usled gubitka energije po eksponcijalnom zakonu.



Oscilatorno kretanje

◆ Prinudne oscilacije. Rezonansa.

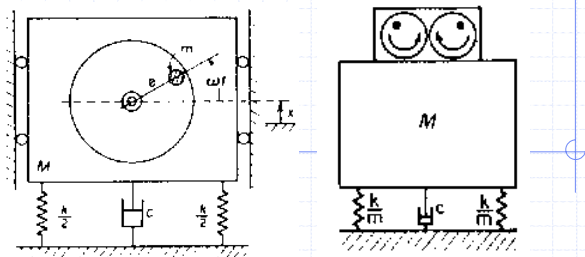
- Ako se kod sistema sa prigušenjem želi održavanje oscilacija neophodno je primeniti spoljašnju silu koja će da nadoknadi gubitak energije usled prigušenja.
- Usled dejstva neke spoljašnje sile nastaju prinudne oscilacije.
- Frekvencija oscilovanja sistema zavisi od frekvencije pobudne sile.



Oscilatorno kretanje

◆ Prinudne oscilacije. Rezonansa.

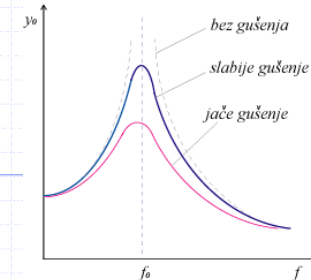
- Primer spoljašnje periodične sile koja izaziva prinudne oscilacije je neuravnotežena masa kod rotacionih mašina.
 - ekscentar rotira stalnom ugaonom brzinom,
 - uspostavlja se stacionarno prinudno oscilovanje sistema:
 - sa prinudnom kružnom frekvencijom koju ima i prinudna sila i
 - amplitudom prinudnih oscilacija.



Oscilatorno kretanje

◆ Prinudne oscilacije. Rezonansa.

- Ako se frekvencija prinudne sile menja:
 - za frekvencije koje su manje od sopstvene frekvencije, amplituda vibracionog sistema će se povećavati sa porastom frekvencije prinudne sile;
 - maksimum se postiže na sopstvenoj frekvenciji;
 - ukoliko u sistemu ne postoji prigušenje amplituda dostiže beskonačnu vrednost,
 - kada je frekvencija prinudne sile mnogo veća od sopstvene, prinudne oscilacije ne postoje.



Oscilatorno kretanje

◆ Prinudne oscilacije. Rezonansa.

- Pojava maksimalnog povećanja amplitude prinudnih oscilacija pod dejstvom prinudne periodične sile naziva se rezonansa.
- Pri rezonansi može doći i do razaranja sistema.



Test pitanja - kolokvijum

1. Periodično i oscilatorno kretanje.

- Kretanje koje se ponavlja u određenim vremenskim intervalima naziva se periodično kretanje.
- Periodično kretanje koje se ponavlja na isti način naziva se oscilatorno kretanje.

2. Vrste oscilacija.

- Slobodne ili sopstvene - izvodi ih oscilatorni sistem ako se izvede iz ravnotežnog položaja i prepusti sam sebi;
- Prigušene - oscilacije sistema u kojem postoji prigušenje.
- Prinudne pod dejstvom spoljašnje periodične sile.

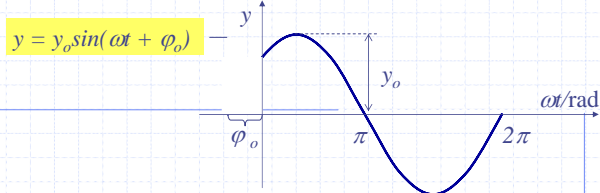
3. Veličine kod periodičnog kretanja.

- Period oscilovanja predstavlja vreme koje je potrebno da sistem izvrši jednu punu oscilaciju.
- Frekvencija oscilovanja predstavlja broj izvršenih oscilacija u jedinici vremena.
- Elongacija (pomeraj) predstavlja rastojanje materijalne tačke ili tela od ravnotežnog položaja.
- Amplituda predstavlja maksimalnu elongaciju (pomeraj) kod prostoperiodičnog kretanja.

Test pitanja - kolokvijum

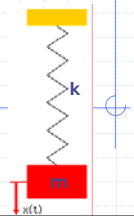
4. Harmonijsko oscilovanje.

- Oscilatorno kretanje čija se elongacija menja po prostoperiodičnom zakonu.



6. Zakon oscilovanja vertikalnog oscilatora bez prigušenja.

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Test pitanja - kolokvijum

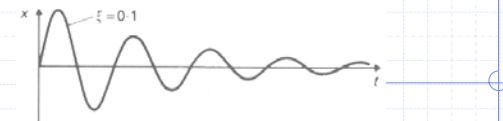
7. Oscilacije matematičkog klatna.

- Oscilacije matematičkog klatna su harmonijske sa periodom oscilovanja koji ne zavisi od mase klatna već samo od dužine klatna i gravitacione konstante.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

8. Amplituda prigušenih sopstvenih oscilacija.

- Amplituda oscilacija postepeno opada ka nuli usled trošenja energije oscilatornog sistema na rad savladavanja sila prigušenja - što je prigušenje veće to amplituda brže opada.



Test pitanja - kolokvijum

9. Amplituda prinudnih oscilacija.

- Za frekvencije prinudne sile koje su manje od sopstvene frekvencije, amplituda će se povećavati sa porastom frekvencije prinudne sile;
- Maksimum se postiže na sopstvenoj frekvenciji;
- Ukoliko u sistemu ne postoji prigušenje amplituda dostiže beskonačnu vrednost, odnosno dolazi do rezonanse.

