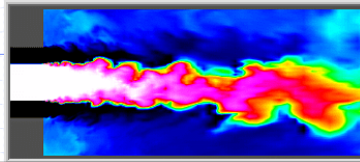


## Dinamika fluida

Oblast koja proučava stanje fluida u kretanju.

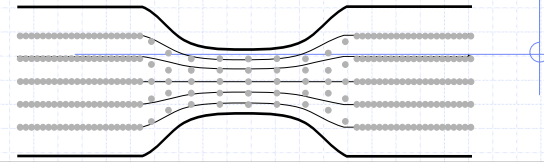
- ◆ Strujanje fluida i jednačina kretanja (AP 139-140)
- ◆ Bernulijeva jednačina i Toričelijeva teorema (AP 140-143)
- ◆ Viskoznost i Stoksov zakon (AP 144-147)



## Dinamika fluida

### ◆ Strujanje fluida.

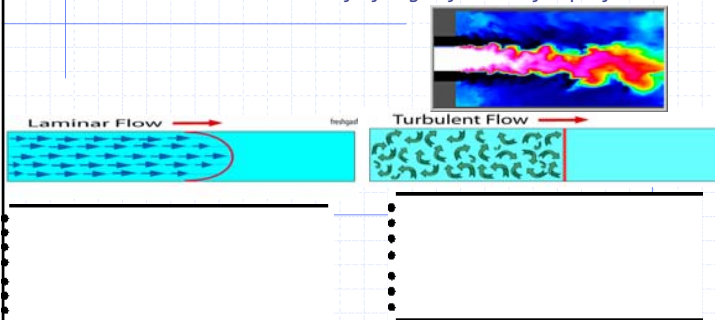
- Kretanje fluida je znatno komplikovanije od kretanja čvrstog tela.
  - ◆ Kretanje fluida se naziva strujanje.
  - ◆ Kretanje fluida se opisuje kretanjem njegovih čestica.
  - ◆ Linije duž kojih se kreću čestice fluida nazivaju se strujnice.
  - ◆ Deo fluida ograničen strujnicama naziva se strujna cev.
  - ◆ Brzina kretanje čestica u određenoj tački strujnice ista je za sve čestice koje dospevaju u tu tačku.
  - ◆ Pravac i smer brzine se menja.



## Dinamika fluida

### ◆ Strujanje fluida.

- Dve vrste strujanja:
  - ◆ Stacionarno (laminarno) strujanje - svaka čestica koja prolazi kroz datu tačku sledi istu strujnu liniju kao i prethodna.
  - ◆ Turbulentno ili vrtložno strujanje - gornji uslov nije ispunjen.



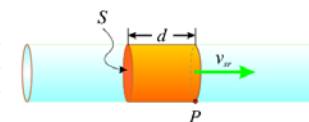
## Dinamika fluida

### ◆ Strujanje fluida.

- Protok fluida se definiše kao zapremina fluida koja u jedinici vremena prođe kroz neku površinu.

$$Q = \frac{V}{t} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{S \cdot vt}{t} = Sv$$

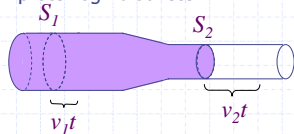
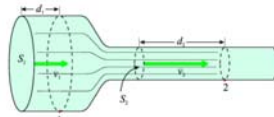


## Dinamika fluida

### ◆ Jednačina kontinuiteta.

- Kada se menja presek cevi kroz koju struji fluid menja se i brzina strujanja.

- $v_1$  - brzina strujanja kroz površinu  $S_1$ ,
- $v_2$  - brzina strujanja kroz površinu  $S_2$ ,
- fluid je nestišljiv pa su obe zapremine protoklog fluida iste:



$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

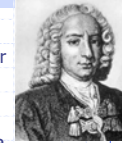
$$Sv = \text{const}$$

### ■ Jednačina kontinuiteta:

- proizvod površine bilo kog poprečnog preseka neke strujne cevi i srednje brzine fluida u tom preseku je konstantan; protok je konstantan
- brzina fluida je veća gde je strujna cev uža.

## Dinamika fluida

Danijel Bernuli  
švajcarski matematičar i fizičar  
(1700-1782)



### ◆ Bernulijeva jednačina.

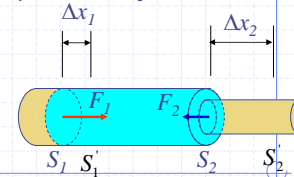
- Ako je fluid nestišljiv i bez unutrašnjeg trenja:
  - proticanjem fluida kroz tesan kanal strujanje se ubrzava,
  - menja se kinetička energije,
  - promena energije je posledica izvršenog rada spoljašnjih sila  $F_1$  i  $F_2$  koje su posledica pritiska koji deluju na preseke  $S_1$  i  $S_2$ ;
  - Sile pritiska su različitih smerova pa radovi imaju različite znakove.

$$A_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 S_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \Delta V$$

$$A_2 = -F_2 \cdot \Delta x_2 = -p_2 S_2 \cdot \Delta x_2 = -p_2 \Delta V$$

$$A_1 + A_2 = \Delta E_k$$

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad : \Delta V$$



$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

## Dinamika fluida

### ◆ Bernulijeva jednačina.

- Bernulijeva jednačina za horizontalnu cev:

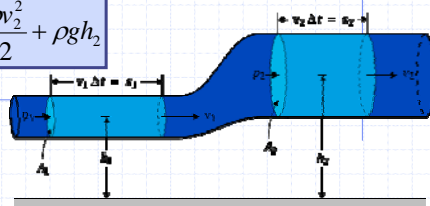
- $p$  - statički pritisak,
- $\frac{\rho v^2}{2}$  - dinamički pritisak,
- $p + \frac{\rho v^2}{2}$  - hidrodinamički pritisak.

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

- Bernulijeva jednačina za kosu cev:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

$\rho g h$  - statički viskozni pritisak



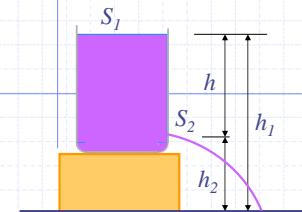
## Dinamika fluida

Evangelista Toričeli  
italijanski matematičar i fizičar  
1608-1647



### ◆ Toričelijeva teorema.

- Isticanje tečnosti kroz mali otvor:



$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$S_1 \gg S_2 \Rightarrow v_1 \ll v_2$$

$$v_1 \approx 0, v_2 \rightarrow v$$

$$p_1 = p_a, p_2 \rightarrow p_a$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

- Brzina isticanja tečnosti je ista kao da tečnost slobodno pada sa visine  $h$ .

- brzina isticanja se smanjuje jer se u toku isticanja smanjuje visina.

## Dinamika fluida

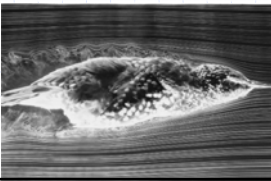
### ◆ Viskoznost.

#### ■ Podela fluida:

- idealni fluid - nema unutrašnjeg trenja,
- realni fluid - pri kretanju postoji unutrašnje trenje kao posledica međumolekularnih sila.

#### ■ Unutrašnje trenje postoji i pri kretanju čvrstog tela kroz fluid.

- Unutrašnje trenje se manifestuje kao sila viskoznosti koja deluje suprotno kretanju.



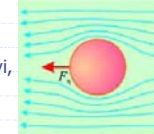
## Dinamika fluida

### ◆ Viskoznost.

#### ■ Dve vrste kretanja:

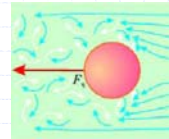
##### • laminarno kretanje

- fluid se kreće u paralelnim slojevima,
- slojevi fluida se kreću različitim brzinama,
- fluid se brže kreće u sredini a sporije ka zidovima cevi,
- slojevi se ne mešaju.



##### • turbulentno kretanje

- javlja se pri većim brzinama,
- javlja se zbog prepreka na putu, naglih promena brzina, viskoznosti
- slojevi se mešaju.



## Dinamika fluida

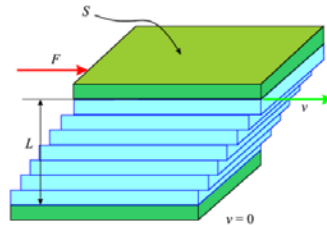
### ◆ Viskoznost.

#### ■ Fluid između dve ploče, nepokretne i pokretne.

- Da bi se gornja ploča pomerila konstantnom brzinom  $v$  potrebno je na nju delovati silom  $F$ .
- U tečnosti se javlja sila trenja ista po intenzitetu ali suprotnog smeru.
- Tanki slojevi fluida između ploča se međusobno relativno kreću:
  - sloj koji dodiruje nepokretnu ploču se ne kreće,
  - ostali slojevi imaju brzine od 0 do  $v$ .
- Sila unutrašnjeg trenja:

$$F = \eta S \frac{v}{L}$$

$\eta$   $\left[ \frac{\text{Pa}}{\text{s}} \right]$  - koeficijent unutrašnjeg trenja  
koeficijent viskoznosti



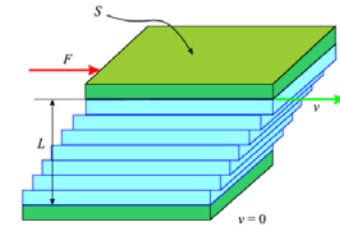
## Dinamika fluida

### ◆ Viskoznost.

#### ■ Sila viskoznog trenja:

- postoji između bilo koja dva sloja u fluidu koji se kreću različitim brzinama,
- srazmerna je dodirnoj površini,
- razlici njihovih brzina,
- obrnuto proporcionalna rastojanju između slojeva,
- zavisi od vrste tečnosti odnosno viskoznosti.

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta L}$$



## Dinamika fluida

### ◆ Stoksov zakon.

#### ■ Kretanje tela u realnim fluidima malom brzinom:

- Sila otpora sredine (unutrašnjeg trenja) je proporcionalna brzini kretanja tela:

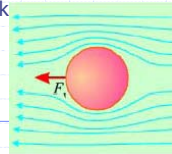
$$F = kv$$

- k - koeficijent srazmernosti koji zavisi od oblika i dimezija tela koje se kreće i viskoznosti sredine kroz koju se telo kreće.
- Za telo sfernog oblika poluprečnik

$$k = 6\pi\eta r$$

- Stoksova formula:

$$F = 6\pi\eta r v$$



Džorž Gebrijel Stoks  
britanski matematičar i fizičar  
1819-1903

## Test pitanja - kolokvijum

### 1. Strujnice i strujna cev.

- Linije duž kojih se kreću čestice fluida nazivaju se strujnice.
- Deo fluida ograničen strujnicama naziva se strujna cev.

### 2. Vrste strujanja kod kretanja fluida

- Stacionarno (laminarno) strujanje - svaka čestica koja prolazi kroz datu tačku sledi istu strujnu liniju kao i prethodna.
- Turbulentno ili vrtložno strujanje - čestica koja prolazi kroz datu tačku ne sledi istu strujnu liniju kao i prethodna.

### 3. Protok fluida.

- Protok fluida se definiše kao zapremina fluida koja u jedinici vremena prođe kroz neku površinu.

$$Q = \frac{V}{t} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

## Test pitanja - kolokvijum

### 4. Jednačina kontinuiteta.

- Proizvod površine bilo kog poprečnog preseka neke strujne cevi i srednje brzine fluida u tom preseku je konstantan, odnosno protok fluida je konstantan.

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

### 5. Bernulijeva jednačina za horizontalnu cev.

- Hidrodinamički pritisak (zbir statičkog i dinamičkog pritiska) je konstantan.

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

### 6. Bernulijeva jednačina za kosu cev.

- Zbir statičkog, statičkog viskozno i dinamičkog pritiska je konstantan.

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

## Test pitanja - kolokvijum

### 7. Toričelijeva teorema.

- Brzina isticanja tečnosti iz suda kroz mali otvor je ista kao da tečnost slobodno pada sa visine h.
- Brzina isticanja se smanjuje jer se u toku isticanja smanjuje visina.

$$v = \sqrt{2gh}$$

### 8. Stoksov zakon.

- Pri kretanju tela u realnim fluidima malom brzinom sila otpora sredine (unutrašnjeg trenja) je proporcionalna brzini kretanja tela:

$$F = kv$$