

I

NACRTNA GEOMETRIJA

UNIVERZITET U NIŠU
FAKULTET ZAŠTITE NA RADU U NIŠU

Mihailo Đurđanović
Ivan Mijailović
Srđan Glišović
Dragan Kulašević

OSNOVI INŽENJERSKE GRAFIKE

Niš 2009

Autori:

Dr Mihailo N.D. Đurđanović, dipl.inž.maš.
red. prof. Fakulteta zaštite na radu u Nišu
Mr Ivan Mijailović, dipl.inž.maš.
ass. Fakulteta zaštite na radu u Nišu
Dr Srđan Glišović, dipl.inž.maš.
doc. Fakulteta zaštite na radu u Nišu
Mr Dragan Kulašević, dipl.inž.znr.
ass. Fakulteta zaštite na radu u Nišu

**OSNOVI
INŽENJERSKE
GRAFIKE**

Izdaje:

Fakultet zaštite na radu u Nišu
Univerziteta u Nišu
Niš, Čarnojevića 10a

Za izdavača:

Prof dr Dragan Spasić, dekan

Recenzenti:

Dr Biserka Marković, red. prof. Građevinsko-arhitektonskog fakulteta u Nišu
Dr Miroslav B. Đurđanović, red. prof. Mašinskog fakulteta u Nišu u penziji

Lektori:

Ljiljana Đorđević

Olja Glišović

Korice:

Rodoljub Avramović, inž.

Tiraž:

300 primeraka

Štampa:

SVEN Niš

COBISS.SR-ID 157524492

PREDGOVOR

Sadržaj udžbenika OSNOVI INŽENJERSKOG PROJEKTOVANJA je usaglašen sa programom predmeta INŽENJERSKA GRAFIKA koji se sluša i polaže, kao obavezni predmet, na prvoj godini osnovnih akademskih studija Fakulteta zaštite na radu u Nišu.

Tekst je izložen u tri dela, a kroz odabrana poglavlja nacrtne geometrije, tehničkog crtanja i crtanja i projektovanja na računaru.

NACRTNA GEOMETRIJA. Osnovni pojmovi i postupci nacrtne geometrije, vrste projiciranja i pripadnost projekcija izloženi su u drugom poglavlju. Treće, četvrto i peto poglavlje razmatra tačku, pravu i ravan u opštem i specijalnom položaju. Međusobni položaj tačke, prave i ravni je dat u šestom poglavlju. Transformacija i rotacija tačke, prave, ravni i tela je obrađena u sedmom i osmom poglavlju. U devetom poglavlju je prikazano projektovanje tela u opštem položaju, odnosno projektovanje tela sa osnovom na ravni. Ravni preseki tela i konstrukcije mreža presečenih tela su izloženi u desetom poglavlju.

Teorijske osnove, iza svakog poglavlja, praćene su zadacima koji imaju za cilj da studentima omoguće brže i efikasnije savlađivanje gradiva iz nacrtne geometrije.

TEHNIČKO CRTANJE. Prvo poglavlje, ovog dela udžbenika, sadrži objašnjenja za crtanje složenih krivih linija, pravilnih poligona, kontura konusnih preseka i cikličnih krivi. Standardi u tehničkom crtanju: veličine i raspored na listovima crteža, zaglavlja i sastavnice, razmere, vrste linija, kotiranje, pozicione oznake, označavanje kvaliteta površina i klasifikacije crteža, prikazani su u drugom poglavlju. Principi prikazivanja predmeta i crtanje potrebnog broja projekcija datog predmeta na bazi njegovog aksonometrijskog izgleda, predstavljanje delova i njihovih detalja i uprošćenja pri crtanju dati su u trećem poglavlju. Četvrto poglavlje obrađuje aksonometrijske crteže različitih predmeta koje treba nacrtati u standardnoj razmeri, tako da budu potpuno oblikovno, dimenziono i obradno definisani.

CRTANJE I PROJEKTOVANJE NA RAČUNARU. U ovom delu obrađene su osnovne komande za crtanje na računaru pomoću programskog paketa AutoCAD. Upoznavanje s AutoCAD-om počinje od osnovnih pojmova, a zatim se od jednosatavnih tema postupno napreduje ka složenijim. Tako,

se najpre obrađuje crtanje jednostavnih geometrijskih oblika kao što su linija, kružnica i kružni luk, a zatim se prelazi na složenije oblasti AutoCAD-a (komande za izmenu nacrtanih elemenata, crtanje složenih linija, šrafiranje itd.). Na kraju su dati praktični zadaci i razmatra rad sa blokovima, kotiranje, kao i završna operacija svakog crteža-štampanje.

Tekst i crteži u knjizi prilagođeni su potrebama studenata kojima mašinstvo i građevina nisu osnovna preokupacija, i imaju za cilj da studentima omoguće da brže i efikasnije savladaju nastavni program.

Recenzentima dr Marković Biserki, red. prof. Građevinskog fakulteta u Nišu i dr Đurđanović B. Miroslavu, red. prof. Mašinskog fakulteta u Nišu u penziji, zahvaljujemo na pomoći i datim korisnim i konkretnim savetima prilikom pregleda rukopisa.

Sa zahvalnošću primićemo sve dobronamerne primedbe i korisne sugestije pažljivog čitaoca čiji bi cilj bio da udžbenik, u drugom izdanju, svojim sadržajem bude kvalitetniji i udovolji što više svojoj nameni.

U Nišu, 16. 08. 2008. god.

Autori

S A D R Ź A J

PREDGOVOR /v/

I NACRTNA GEOMETRIJA /1.1/

1.1. UVOD /1.3/

1.2. OSNOVNI POJMOVI /1.7/

1.2.1. Projeciranje i vrste projekcija /1.7/

1.2.1.1. Projeciranje na jednu ravan /1.10/

1.2.1.2. Projeciranje na dve ravni /1.11/

1.2.1.3. Projeciranje na tri ravni /1.13/

1.2.1.4. Vrednost i predznak koordinata tačke /1.17/

1.2.1.5. Položaj projekcija i pripadnost tačke /1.19/

ZADACI 1.1-1.12 /1.20/

1.3. TAČKA I NJENE PROJEKCIJE /1.21/

1.3.1. Proizvoljan položaj tačke u prostoru /1.21/

1.3.2. Specijalan položaj tačke /1.24/

ZADACI 1.13-1.24 /1.27/

1.4. PRAVA I NJENE PROJEKCIJE /1.29/

1.4.1. Projekcije prave /1.29/

1.4.2. Položaj prave u prostoru /1.30/

1.4.2.1. Proizvoljan položaj prave /1.30/

1.4.2.2. Specijalan položaj prave /1.31/

1.4.2.3. Međusobni položaj dve prave /1.38/

1.4.2.4. Prodor prave kroz projekcijske ravni /1.39/

ZADACI 1.25-1.36 /1.43/

1.5. RAVAN I NJENE PROJEKCIJE /1.45/

1.5.1. Prikazivanje ravni tragovima /1.45/

1.5.2. Proizvoljan položaj ravni /1.46/

1.5.3. Specijalan položaj ravni /1.47/

1.5.3.1. Ravan paralelna sa projekcijskom ravni /1.47/

1.5.3.2. Ravan normalna na projekcijsku ravan /1.48/

1.5.4. Međusobni položaj dve ravni /1.50/

1.5.4.1. Paralelne ravni /1.50/

1.5.4.2. Presek dve ravni /1.50/

1.5.5. Sutražnice /1.51/

1.5.5.1. Prva sutražnica /1.52/

1.5.5.2. Druga sutražnica /1.52/

1.5.6. Nagibnice /1.53/

1.5.6.1. Prva nagibnica /1.54/

1.5.6.2. Druga nagibnica /1.54/

ZADACI 1.37-1.48 /1.55/

1.6.	MEĐUSOBNI POLOŽAJ TAČKE, PRAVE I RAVNI	/1.57/
1.6.1.	Tačka i prava	/1.57/
1.6.2.	Tačka i ravan	/1.57/
1.6.3.	Prava i ravan	/1.61/
	ZADACI 1.49-1.60	/1.63/
1.7.	TRANSFORMACIJA	/1.65/
1.7.1.	Transformacija tačke	/1.65/
1.7.2.	Transformacija prave	/1.66/
1.7.3.	Transformacija slike	/1.67/
1.7.4.	Transformacija tela	/1.68/
	ZADACI 1.61-1.72	/1.69/
1.8.	ROTACIJA	/1.71/
1.8.1.	Rotacija tačke	/1.71/
1.8.2.	Rotacija prave	/1.72/
1.8.3.	Rotacija slike	/1.73/
1.8.4.	Obaranje ravni	/1.74/
1.8.5.	Rotacija tela	/1.75/
	ZADACI 1.73-1.84	/1.75/
1.9.	TELA I NJIHOVE PROJEKCIJE	/1.77/
1.9.1.	Projeciranje rogljastih tela	/1.77/
1.9.1.1.	Piramide	/1.77/
1.9.1.2.	Prizme	/1.79/
1.9.2.	Projeciranje obliha tela	/1.81/
1.9.2.1.	Kružni konusi	/1.81/
1.9.2.2.	Kružne oblice	/1.83/
	ZADACI 1.85-1.96	/1.85/
1.10.	PRESECI TELO RAVNIMA I MREŽE	/1.87/
1.10.1.	Ravan presek i mreža piramide	/1.87/
1.10.1.1.	Presek kose piramide i ravni $\alpha(\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z)$	/1.87/
1.10.1.2.	Presek normalne piramide i ravni $\varepsilon(\varepsilon_x; \infty; \varepsilon_z)$	/1.90/
1.10.2.	Ravan presek i mreža prizme	/1.92/
1.10.2.1.	Presek kose prizme i ravni $\alpha(\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z)$	/1.92/
1.10.2.2.	Preseka normalne prizme i ravni $\varepsilon(\varepsilon_x; \infty; \varepsilon_z)$	/1.95/
1.10.3.	Ravan presek i mreža kružnog konusa	/1.97/
1.10.3.1.	Presek kosog kružnog konusa i ravni $\alpha(\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z)$	/1.97/
1.10.3.2.	Presek normalnog kružnog konusa i ravni $\varepsilon(\varepsilon_x; \infty; \varepsilon_z)$	/1.99/
1.10.4.	Ravan presek i mreža kružne oblice	/1.102/
1.10.4.1.	Presek kose kružne oblice i ravni $\alpha(\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z)$	/1.102/
1.10.4.2.	Presek normalne kružne oblice i ravni $\varepsilon(\varepsilon_x; \infty; \varepsilon_z)$	/1.104/
	ZADACI 1.97-1.110	/1.106/
	LITERATURA	/1.108/

II TEHNIČKO CRTANJE /2.1/

2.1. GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE /2.3/

- 2.1.1. Konstrukcija složene krive linije /2.3/
- 2.1.2. Konstrukcija pravilnih poligona /2.6/
- 2.1.3. Konstrukcija kontura konusnih preseka /2.10/
- 2.1.4. Konstrukcija cikličnih krivih /2.15/
- 2.1.4.1. Konstrukcija sinusoide /2.15/
- 2.1.4.2. Konstrukcija kosinusoide /2.15/
- 2.1.4.3. Konstrukcija cikloide /2.15/
- 2.1.4.4. Konstrukcija epicikloide /2.16/
- 2.1.4.5. Konstrukcija hipocikloide /2.17/
- 2.1.4.6. Arhimedova spirala /2.18/

2.2. STANDARDI U TEHNIČKOM CRTANJU /2.19/

- 2.2.1. Postupci izrade i vrste crteža /2.19/
- 2.2.2. Veličine i raspored na listovima crteža /2.20/
- 2.2.3. Postupci previjanja crteža /2.24/
- 2.2.4. Zaglavlje i sastavnica /2.26/
- 2.2.5. Tehničko pismo /2.32/
- 2.2.6. Razmera /2.33/
- 2.2.7. Vrste linija i njihova upotreba /2.34/
- 2.2.8. Kotiranje /2.35/
- 2.2.9. Pozicione oznake /2.42/
- 2.2.10. Decimalna klasifikacija crteža /2.43/
- 2.2.11. Označavanje kvaliteta površina /2.43/

2.3. PRINCIPI PRIKAZIVANJA PREDMETA /2.47/

- 2.3.1. Ortogonalne projekcije predmeta /2.47/
- 2.3.2. Pogledi /2.48/
- 2.3.3. Preseci /2.52/
- 2.3.4. Šrafiranje preseka /2.56/
- 2.3.5. Predstavljanje delova i njihovih detalja /2.59/
- 2.3.6. Uprošćenja pri crtanju /2.60/

2.4. ZADACI ZA VEŽBU /2.62/

LITERATURA /2.68/

III CRTANJE I PROJEKTOVANJE NA RAČUNARU /3.1/

3.1. POKRETANJE APLIKACIJE /3.3/

3.2. RADNO OKRUŽENJE /3.4/

3.3. PADAJUĆI MENIJI I PALETA ALATKI "STANDARD" /3.7/

3.3.1. "File" meni /3.8/

3.3.2. "Edit" meni /3.10/

3.3.3. "View" meni /3.11/

3.3.4. "Insert" meni /3.14/

3.3.5. "Format" meni /3.16/

3.3.6. "Tools" meni /3.17/

3.3.7. "Draw" meni /3.18/

3.3.8. "Dimension" meni /3.19/

3.3.9. "Modify" meni /3.20/

3.3.10. "Window" meni /3.21/

3.3.11. "Help" meni /3.22/

3.4. KOMANDNI PROZOR "COMMAND WINDOW" /3.23/

3.5. STATUSNA TRAKA /3.24/

3.6. POVRŠINA ZA CRTANJE /3.24/

3.7. IKONICA UCS /3.25/

3.8. PALETE ALATKI /3.25/

3.8.1. Premeštanje paleta /3.27/

3.9. DODATAK /3.32/

3.10. POSTUPAK IZRADE 2D CRTEŽA /3.45/

LITERATURA /3.53/

1.1. UVOD

Blagodareći poznavanju zakona
nacrtna geometrije ceo tehnički
svet govori zajedničkim jezikom.

Nacrtna geometrija je tehnička nauka koja izučava postupke prikazivanja i crtanja prostornog oblika u ravni. Pomoću metoda i postupaka nacrtna geometrije može se nacrtati predmet koji se gleda ili zamišlja ili se na osnovu crteža stvara jasna predstava o njegovom izgledu.

Osnovu današnjoj nacrtnoj geometriji postavio je Gaspard Monge objavljujući 1798. godine u Parizu originalno delo "Geometrie descriptive". "Postupak koji je on u svom delu uveo, toliko je za nas koji ga primenjujemo jednostavan, da ne možemo da zamislimo da nije bio uvek korišćen". U svom delu Gaspard Monge objašnjava postupke projiciranja geometrijskih elemenata u pogledu veličina, oblika i međusobnih položaja na jednu ili dve projekcijske ravni; transformacijom je povezoao dve ortogonalne projekcije jednog predmeta dobijene projiciranjem na dve međusobno upravne ravni; naučno odredio postupak ortogonalnog projiciranja; oslobodio se empirizma i time postao jedan od tvoraca jedinstvenog jezika - nove naučne discipline koja je dobila naziv *nacrtna geometrija*.

Nacrtna geometrija kao teorijska podloga tehničkom crtanju ima zadatak, da kod studenata, razvije sposobnost prostornog zamišljanja oblika. Iz navedenih razloga se preporučuje studentima da pri izučavanju ove materije ne koriste šablonske postupke, već da uz poznavanje teorijske osnove, kroz vežbu i sami pronalaze postupke i puteve koji brže i jednostavnije vode ka rešenju postavljenog zadatka.

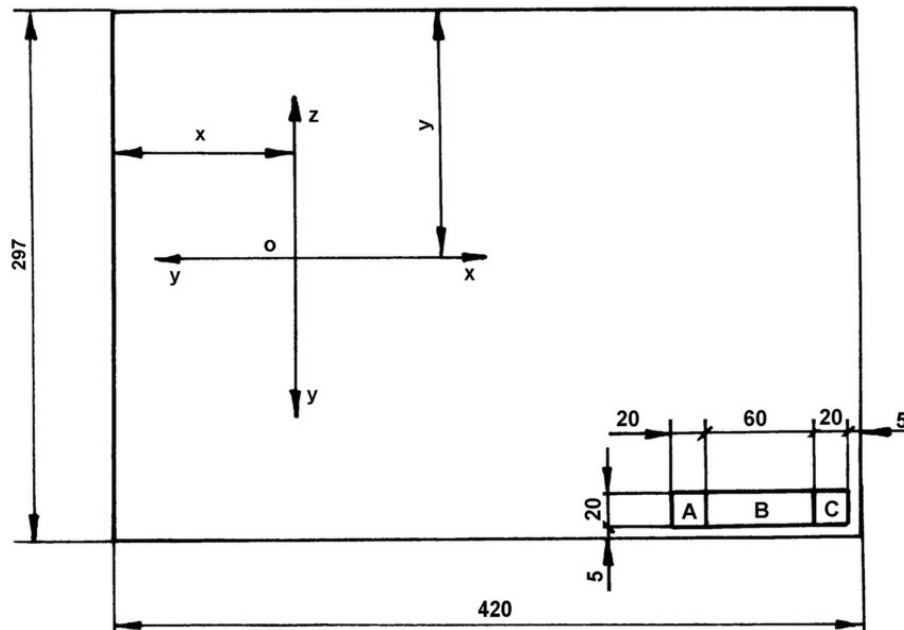
Da bi se što potpunije savladale metode nacrtna geometrije, između ostalog, moraju se poznavati postupci projiciranja, transformacije i rotacije, a kroz to i osnovna tehnika crtanja, odnosno projektovanja.

U ovoj knjizi, za obeležavanje određenih pojmova, koriste se uobičajene oznake:

- Tačke će uvek biti obeležavane velikim štampanim slovima latinice, na primer: A, B, C, D..., ili po potrebi (pomoćne tačke) arapskim i rimskim brojevima, na primer 1, 2, 3, 4,...; I, II, III, IV..., a njihove projekcije u horizontalnici, vertikalnici i profilnici respektivno sa A', A'', A'''; 1', 1'', 1'''; odnosno I', I'', I'''.

- Projekcijske ravni biće obeležavane velikim slovima latinice i to:
 - H** - horizontalna projekcijska ravan ili *horizontalnica*
 - V (F)** - vertikalna projekcijska ravan ili *vertikalnica* ili *frontalnica*,
 - P** - profilna projekcijska ravan ili *profilnica*.
- Prave linije (u ravni i prostoru) biće obeležavane malim slovima latinice, na primer: a, b, c, d,..., a njihove projekcije sa a', a'', a'''; b', b'', b'''; c', c'', c'''; d', d'', d'''
- Prodor prave kroz projekcijske ravni - *trag prave* obeležavaće se velikim štampanim slovom latinice i stavljati odgovarajući indeks projekcijske ravni, na primer: A₁ - prvi trag, prodor prave kroz horizontalnicu; A₂ - drugi trag, prodor prave kroz vertikalnicu i A₃ - treći trag prave, prodor prave kroz profilnicu, a njihove projekcije: A₁', A₁'', A₁'''; A₂', A₂'', A₂'''; A₃', A₃'', A₃'''
- Prodor prave kroz proizvoljnu ravan, na primer: prodor prave p kroz proizvoljnu ravan, obeležavaće se sa P, a projekcije sa P', P'' i P'''.
- Proizvoljne ravni, ravni u specijalnom položaju i uglovi biće obeležavani malim grčkim slovima: α, β, γ, δ,....
- Presek proizvoljne ravni ili ravni u specijalnom položaju α, β, γ,... sa projekcijskim ravnima H, V i P - *trag ravni* obeležavaće se α₁, α₂, α₃, a njihove projekcije sa α₁', α₁'', α₁'''; dok prodore x, y i z-ose kroz zadatu ravan α (osni tragovi), sa α_x, α_y i α_z.
- Tragove ravni, odnosno preseke pomoćnih ravni sa projekcijskim ravnima H, V i P kod transformacija, obeležavaće se sa 1X₃, 2X₃, 3X₄.
- Zaokružena oznaka projekcije neke prave označava da se prava u toj projekciji vidi u pravoj veličini, na primer: \textcircled{P}
- Od znakova upotrebljavaće se:
 - || - paralelan sa...,
 - ⊥ - normalan na...,
 - ∞ - beskonačno,
 - ≡ - identičan sa....
- Od uobičajenih skraćenica biće korišćene:
 - p[A,B]** - prava p definisana tačkama A i B;
 - α(α_x;α_y;α_z)** - ravan definisana osnim tragovima;
 - α[a,b]** - ravan definisana pravama a i b;
 - β[b,B]** - ravan definisana pravom b i tačkom B.

Zadatke crtati sa jedne strane lista hartije formata A3 (420mm x 297mm), a list hartije obavezno obeležavati prema detalju kao na *slici 1.1*: A - Broj vežbe i datum; B - Ime i prezime; C - Broj indeksa.



Sl. 1.1. Obeležavanje lista formata A3

Koordinatni početak $O(x;y)$ se određuje u preseku apscise i ordinate, *slika 1.1*, tako što se iz gornjeg levog ugla lista:

$x(\text{mm})$ - apscisa nanese horizontalno nadesno, a

$y(\text{mm})$ - ordinata vertikalno nadole.

Pri rešavanju pojedinih zadataka koriste se slova grčke alfabete, *tabela 1.1*:

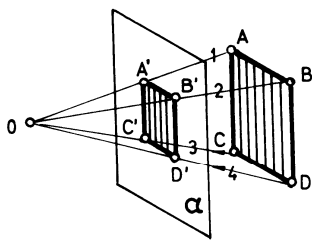
Tabela 1.1.

α A - alfa	β B - beta	γ Γ - gama	δ Δ - delta
ε E - epsilon	ζ Z - zeta	η H - eta	θ Θ - teta
ι I - jota	κ K - kapa	λ Λ - lambda	\omicron O - omikron
ν N - ni	μ M - mi	ξ Ξ - ksi	π Π - pi
ρ P - ro	σ Σ - sigma	τ T - tau	υ Y - ipsilon
φ Φ - fi	χ X - hi	ψ Ψ - psi	ω Ω - omega

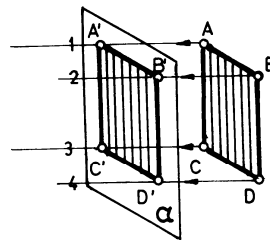
1.2. OSNOVNI POJMOVI

1.2.1. Projeciranje i vrste projekcija

Projeciranje je postupak koji omogućuje prikazivanje, odnosno crtanje, prostornog oblika u ravni. Projeciranje se vrši pravolinijskim projektujućim zracima koji idu ka središtu posmatranja - ka našem oku - tački O, tzv. centru projeciranja, *sl. 1.2.* ili u centar projeciranja koji je beskonačno udaljen i čiji su zraci projeciranja paralelni, *sl. 1.3.* Prema prvom postupku dobija se, tzv. *centralna* ili *perspektivna* projekcija, a prema drugom - tzv. *paralelna* projekcija.



Sl. 1.2. Centralna projekcija

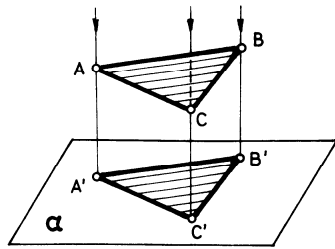


Sl. 1.3. Paralelna projekcija

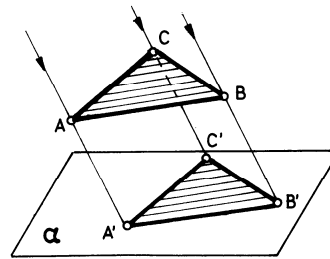
Kod centralne projekcije, *sl. 1.2.* kada se projektuje neki lik ABCD, projektujući zraci 1, 2, 3, 4 idu od tačaka A, B, C, D ka središtu posmatranja, tj. prema tački O. Ako se između tačaka A, B, C, D i središta posmatranja O postavi neka ravan α , paralelna sa ravni koju čini sam lik, projektujući zraci će prodirati kroz ovu ravan i ostavljati na njoj odgovarajuće tragove. Ravan α se zove *projekcijska ravan*, dok se tragovi projektujućih zrakova na nju zovu - *projekcije tačaka na ravan α* . Na *sl. 1.2.* to su tačke A', B', C' i D'. Spojene tačke A', B', C' i D' predstavljaju centralnu projekciju ili perspektivu posmatrane slike čije su tačke A, B, C i D tzv. *karakteristične tačke*. Centralna projekcija daje najstvarniji izgled lika. Međutim, ova projekcija nije pogodna za tehnički crtež, jer na njemu duži koje su jednake u prirodi nisu jednake na crtežu.

Paralelna projekcija, *sl. 1.3.* ne daje najprirodniji izgled lika koji se projektuje, ali je pogodna za tehnički crtež, jer su na njemu duži koje su jednake u prirodi jednake i na crtežu, a i crtanje paralelnih zraka je jednostavnije od crtanja zraka centralne projekcije. Kod paralelne projekcije projektujući zraci 1, 2, 3, 4 su međusobno paralelni i padaju normalno ili pod nekim uglom na projekcijsku ravan. U prvom slučaju

dobija se *normalna* ili *ortogonalna* projekcija, *sl. 1.4.*, a u drugom slučaju *kosa* ili *klinogonalna* projekcija, *sl. 1.5.*



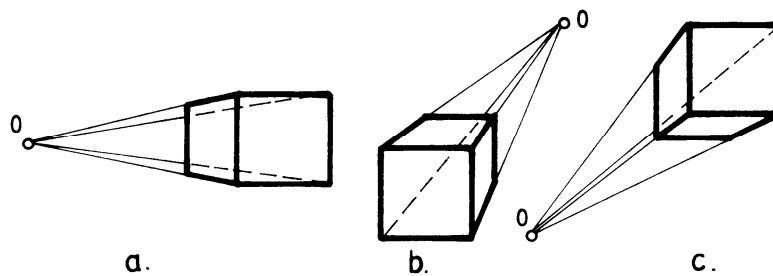
Sl. 1.4. Ortogonalna projekcija



Sl. 1.5. Kosa projekcija

Da bi se dobila što jasnija predstava o izgledu predmeta, ili da bi se jednom slikom prikazale sve tri dimenzije predmeta, koriste se metode prostornog prikazivanja. U tom cilju se u praksi najviše upotrebljavaju linijska perspektiva, kosa projekcija i aksonometrija.

• Linijska perspektiva



Sl. 1.6. Vrste linijske perspektive

Linijska perspektiva, *sl. 1.6*, prikazuje predmete onako kako ih vidi naše oko. Kod ove perspektive, ivice koje predstavljaju treću dimenziju se udaljavaju i približavaju dok se na kraju ne spoje u jednu tačku. Tačka O, gde izgleda da se ivice spajaju, naziva se tačka *nedogleda* ili *iščezavajuća tačka*.

U zavisnosti od položaja tačke nedogleda, *sl. 1.6*, razlikuju se tri vrste linijske perspektive :

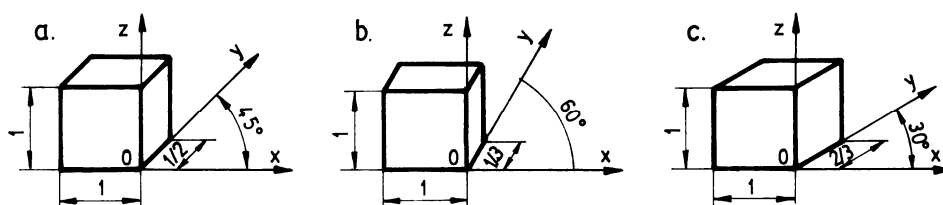
- a) Frontalna, *sl. 1. 6. a.* - tačka nedogleda se nalazi desno ili levo u visini posmatranog crteža,
- b) Ptičija, *sl. 1. 6. b.* - tačka nedogleda je desno ili levo iznad posmatranog crteža i

c) Žablja perspektiva, *sl. 1. 6. c.* - kada se tačka nedogleda nalazi desno ili levo ispod posmatranog crteža.

• Kosa projekcija

U kosoj projekciji predmet zadržava prirodan izgled pri čemu se jedna cela površina crta u prirodnoj veličini, sa odnosom dimenzija 1:1, a ivice treće dimenzije, koje se kod ove projekcije udaljavaju, ne sastaju se u jednoj tački već ostaju uvek paralelne. Predmet se posmatra iskosa (pod uglom) tako da se dimenzija širine crta uvek na y-osi i skraćuje, kako je to prikazano na *sl. 1.7.* Skraćenja zavise od veličine ugla koji zaklapa x i y-osa i to za:

- ugao 45° - skraćenje je za $1/2$, *sl. 7.a.*,
- ugao 60° - skraćenje je za $2/3$, *sl. 7.b.* i
- ugao 30° - skraćenje je za $1/3$, *sl. 7.c.*



Sl. 1.7. Kosa projekcija

• Aksonometrija

I kod aksonometrije, kao i kod kose projekcije, paralelne ivice predmeta se udaljavaju i ostaju na crtežu paralelne. Karakteristično za ovu vrstu projekcija je da se jedna ivica predmeta stavlja uvek u vertikalni položaj i crta bez skraćivanja, dok ostale ivice predmeta, zavisno od vrste projekcija, mogu ostati iste ili se mogu skratiti. Predmet se uvek posmatra iskosa, a prema broju skraćivanja aksonometrija može biti *trimetrijska*, *dimetrijska* i *izometrijska*.

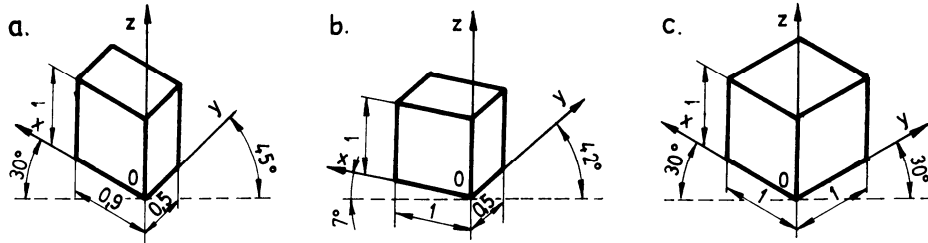
Trimetrijska projekcija primenjuje se radi boljeg objašnjenja predmeta koji se prikazuje i karakteriše je odnos dimenzija 1:0,9:0,5, *sl. 1.8.a.*

Za slučaj kada se želi da istakne glavni pogled predmeta primenjuje se dimetrijska projekcija, pri čemu je odnos dimenzija 1:1:0,5, *sl. 1.8.b.*

Kada je na nekom predmetu veoma važno da se vide sve tri dimenzije, koristi se izometrijska projekcija, *sl. 1.8.c.* Izometrijsku projekciju karakteriše odnos dimenzija 1:1:1, tj. predmet se crta u prirodnoj veličini, bez

skraćenja i najviše se primenjuje u mašinskom tehničkom crtanju, jer se podjednako dobro vide detalji u sve tri dimenzije.

Svi dosad navedeni postupci prikazivanja predmeta imaju svoje dobre i loše osobine. Tako, perspektiva daje najverniji izgled, ali su površine deformisane, a paralelne ivice nisu paralelne. Da bi se uklonili navedeni nedostaci, tj. da se sve dimenzije na crtežu vide u pravoj veličini, odnosno da se sve površine vide u pravom obliku primenjuje se ortogonalna projekcija.



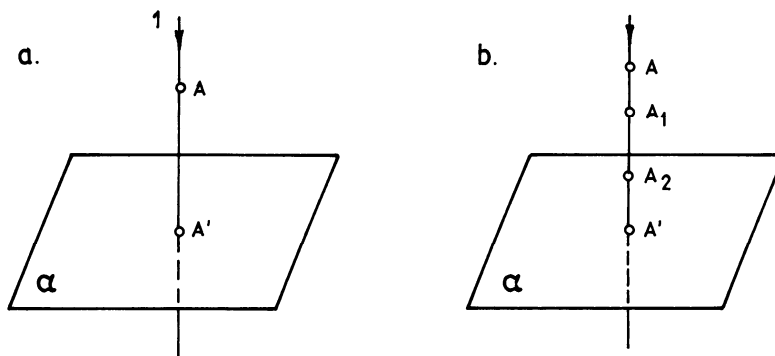
Sl. 1.8. Aksonometrija:

a) Trimetrijska, b) Dimetrijska, c) Izometrijska

Kod ortogonalne projekcije predmet se prikazuje u izgledu pojedinih njegovih strana u pravoj veličini. Da bi se lakše savladala tehnika ortogonalne projekcije, koriste se i primeri prostornog prikazivanja predmeta.

1.2.1.1. Projeciranje na jednu ravan

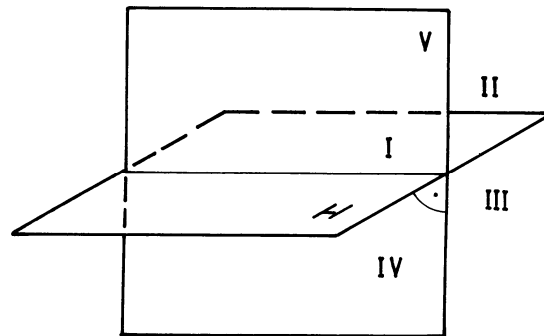
Ako se kroz tačku A pusti projektujući zrak 1 na datu ravan α , sl. 1.9.a. dobija se ortogonalna projekcija A' tačke A u horizontalnoj ravni α , tzv. prva projekcija A' tačke A (čitaj: A crta ili A prim). Takođe, sa sl. 1.9.b.



Sl. 1.9. Ortogonalno projeciranje tačke na jednu ravan

se vidi da je tačka A' u isto vreme projekcija ostalih tačaka A_1 i A_2 , koje se nalaze na istom pravcu - normali. Iz svega ovoga može se zaključiti da sa jednom ravni i jednom projekcijom nije moguće definisati položaj tačke A u prostoru, jer projekcija A' može biti istovremeno projekcija za sve druge tačke koje se nalaze na istom projektujućem zraku.

1.2.1.2. Projeciranje na dve ravni



Sl. 1.10. Kvadranti

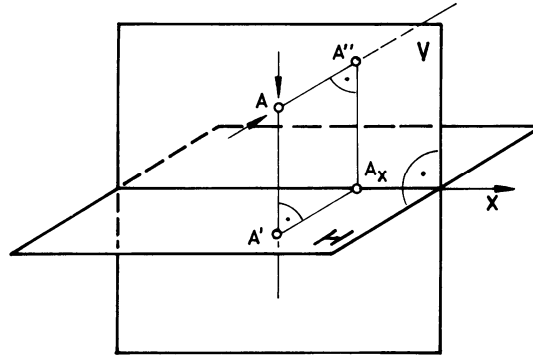
U prethodnoj tački je zaključeno da se pomoću jedne projekcije tačke ne može definisati njen položaj u prostoru. Za određivanje položaja pojedinih tačaka ili izgleda nekog tela, vrlo često je dovoljan prostor koji obuhvataju dve ravni. Za projeciranje na dve ravni, *sl. 1.10*, koristi se prostor koji grade dve ravni-tzv. projekcijske ravni. Ove dve ravni, od kojih je jedna u horizontalnom položaju i zove se horizontalnica, a druga u vertikalnom položaju i zove se vertikalnica, dele prostor na četiri pravouglata dijedra - kvadranta. Svaki od kvadranta je ograničen sa dve poluravnine i oni se obeležavaju rimskim brojevima od I do IV:

- I (prvi) kvadrant je prostor iznad horizontalnice i ispred vertikalnice.
- II (drugi) kvadrant je iznad horizontalnice i iza vertikalnice.
- III (treći) kvadrant čini prostor ispod horizontalnice i iza vertikalnice.
- IV (četvrti) kvadrant je prostor ispod horizontalnice i ispred vertikalnice.

• Prostorno projeciranje na dve ravni

Ako se kroz tačku A , koja se nalazi u prvom kvadrantu, pusti projektujući zrak normalno na horizontalnicu, *sl. 1.11*, dobija se u horizontalnici

prodorna tačka A' . Za tačku A' je rečeno da predstavlja prvu projekciju tačke A . Analogno, druga projekcija A'' (čitaj: A dve crte, ili A sekund) je prodor projektujućeg zraka normalnog na vertikalnicu.

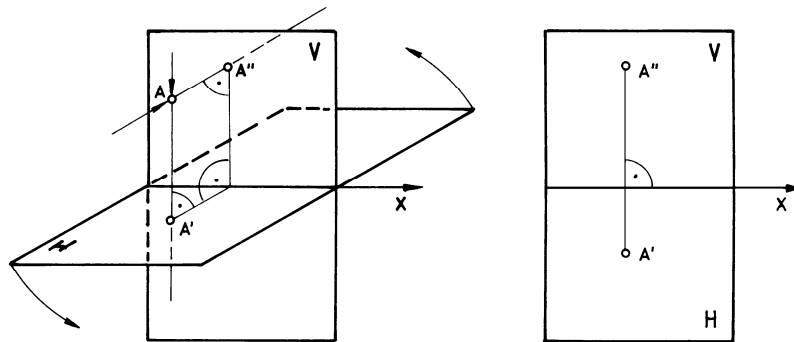


Sl. 1.11. Prostorno projiciranje na dve ravni

Prave povučene iz prve projekcije A' normalno na x-osu, (ovu normalu zovemo ordinatom), i iz druge projekcije A'' , takođe, normalno na x-osu, seku se u istoj tački A_x na x-osi. Iz ovog proizilazi pravilo: Ordinate povučene iz prve i druge projekcije, seku se uvek u jednoj tački na x-osi.

• **Ortogonalno projiciranje na dve ravni**

Opšti položaj tačke u prostoru prikazuje se jednostavnije u ravni, pomoću ortogonalne projekcije. U tom smislu, prostorni sistem prikazan na sl. 1.12, transformiše se u ravanski, sl. 1.13, obaranjem horizontalnice u vertikalnicu zaokretanjem horizontalnice za ugao od 90° oko x-ose, u smeru strelica.



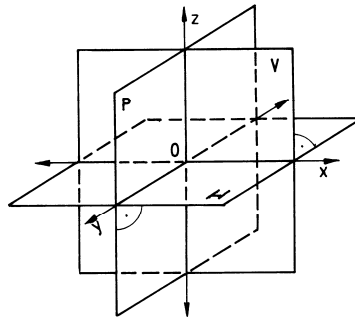
Sl. 1.12. Smer obaranja ravni

Sl. 1.13. Ortogonalna projekcija

Na osnovu opisanih postupaka, prikazanim sl. 1.12. i 1.13, izvodi se zaključak da su horizontalna i vertikalna projekcijska ravan preklapljene. To znači, da se prva projekcija A' crta u horizontalnici, a druga projekcija A'' se crta u

vertikalnici, ili, prva i druga projekcija se nalaze na pravoj (ordinati, sponi) koja je normalna na x-osu. Opšti je zaključak: Prva i druga projekcija neke tačke je ortogonalna projekcija ako se projekcije nalaze na pravoj koja je normalna na x-osu.

1.2.1.3. Projeciranje na tri ravni



Sl. 1.14. Položaj projekcijskih ravni u prostoru

U nacrtnoj geometriji, za potpuno definisanje oblika tela i tačno određivanje položaja u prostoru koriste se tri projekcijske ravni: *horizontalnica*, *vertikalnica* i *profilnica*.

Horizontalna projekcijska ravan - *horizontalnica*, sl. 1.14. je prva projekcijska ravan, nalazi se u horizontalnom položaju i označena je početnim slovom H, arapskim brojem **1** ili malim grčkim slovom π_1 .

Vertikalna projekcijska ravan - *vertikalnica (frontalnica)*, sl. 1.14. je druga projekcijska ravan i nalazi se u verikalnom položaju u odnosu na horizontalnicu. Obeležava se velikim slovom latinice V, arapskim brojem **2** ili malim grčkim slovom π_2 .

Profilna projekcijska ravan - *profilnica*, sl. 1.14. je treća projekcijska ravan i normalna je istovremeno na horizontalnicu i vertikalnicu. Označava se velikim slovom latinice P, arapskim brojem **3** ili malim grčkim slovom π_3 .

Obeležavanje projekcijskih ravni je stvar dogovora. U knjizi biće korišćene oznake kao na sl. 1.14:

H - HORIZONTALNICA,

V - VERTIKALNICA (F-FRONTALNICA) i

P - PROFILNICA

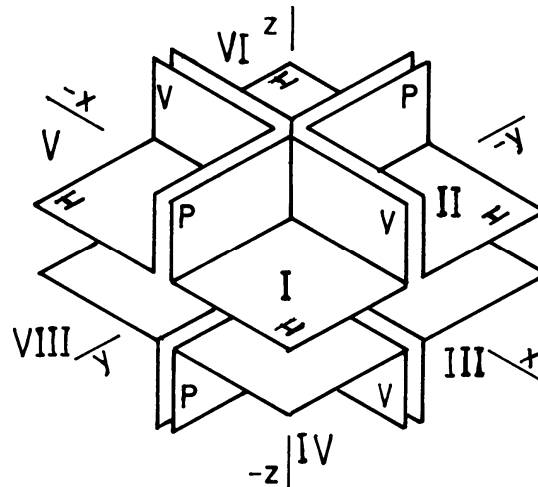
Projekcijske ravni H, V(F) i P, stoje jedna na drugu normalno i čine tzv. sklop projekcijskih ravni. Međusobni preseki projekcijskih ravni obrazuju projekcijske ose, *sl. 1.14.* i to:

- presek horizontalnice i vertikalnice je **apscisa** ili prva projekcijska osa x. Apscisa ili x-osa, desno od profilnice je pozitivna (+), a levo negativna (-); *x-osa je prva projekcija vertikalnice, a druga projekcija horizontalnice.*

- presek horizontalnice i profilnice je **ordinata** ili druga projekcijska osa y. Ordinata ili y-osa, ispred vertikalnice je pozitivna (+), a iza negativna (-); *y-osa je prva projekcija profilnice i treća projekcija horizontalnice.*

- presek vertikalnice i profilnice je **aplikata** ili treća projekcijska osa z. Aplikata ili z-osa, iznad horizontalnice je pozitivna (+), ispod negativna (-); *z-osa je druga projekcija profilnice, a treća projekcija vertikalnice.*

Projekcijske ose x, y, z su međusobno ortogonalne i obrazuju sklopni - prostorni pravougli projekcijski sistem ili osnovni ortogonalni trijedrar. Presek projekcijskih osa naziva se koordinatni početak ili centar osnovnog trijedra i obeležava se sa O.



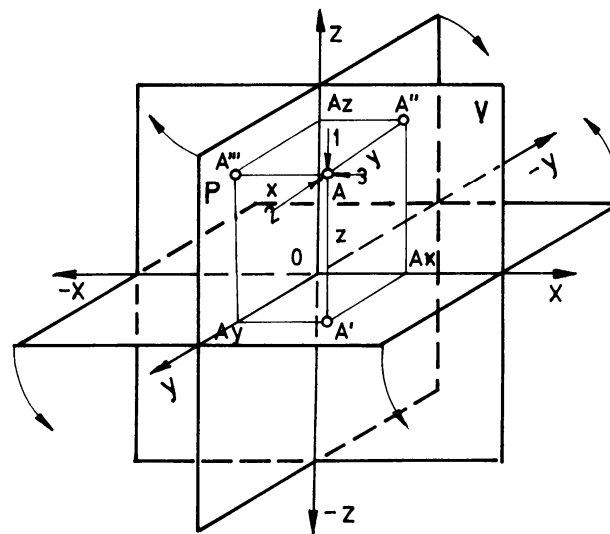
Sl. 1.15. Položaj oktanata u prostoru

Projekcijskim ravnima H, V, P *sl. 1.15*, prostor je podeljen na osam delova koji se nazivaju oktanti. Oktanti, obeleženi rimskim brojevima, od I do IV su desno, a oktanti od V do VIII su levo od profilnice.

- I oktant je prostor iznad horizontalnice, ispred vertikalnice, a desno od profilnice.
- II oktant je prostor iznad horizontalnice, iza vertikalnice, a desno od profilnice.
- III oktant je prostor ispod horizontalnice, iza vertikalnice, a desno od profilnice.
- IV oktant je prostor ispod horizontalnice, ispred vertikalnice, a desno od profilnice.
- V oktant je prostor iznad horizontalnice, ispred vertikalnice, a levo od profilnice.
- VI oktant je prostor iznad horizontalnice, iza vertikalnice, a levo od profilnice.
- VII oktant je prostor ispod horizontalnice, iza vertikalnice, a levo od profilnice.
- VIII oktant je prostor ispod horizontalnice, ispred vertikalnice, a levo od profilnice.

• **Prostorno projiciranje na tri ravni**

Na osnovu položaja projekcijskih ravni i osa koordinatnog sistema može se zaključiti da prvu projekcijsku ravan - horizontalnicu (H) određuju x i y-osa, drugu projekcijsku ravan - vertikalnicu (V) određuju x i z-osa, a treću projekcijsku ravan - profilnicu (P) čine y i z-osa.



Sl. 1.16. Prostorno projiciranje na tri ravni

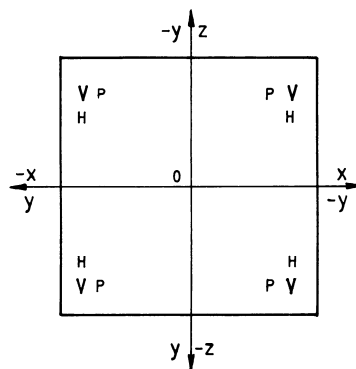
U prvom oktantu prostornog sistema H, V, P, *sl. 1.16*, prikazano je projiciranje tačke A na tri ravni. Projektujući zraci 1, 2, 3 povučeni iz tačke A normalno na projekcijske ravni H, V, P prodiru kroz odgovarajuće ravni. Tačke prodora projektujućih zrakova kroz ravan predstavljaju projekcije tačke A i to: u horizontalnici je prva projekcija A', A'' je druga projekcija i pripada vertikalnici, a u profilnici je treća projekcija A''' (čitaj: A tri crte, ili A terca).

Sve što je do sada rečeno za projekciju tačke na dve ravni važi i ovde, s tim što se može dopuniti da dve njene projekcije sa odgovarajućim projekcijskim zracima obrazuju ravan i to:

- prva i druga projekcija ravan paralelna profilnici,
- prva i treća projekcija ravan paralelna vertikalnici i
- druga i treća projekcija ravan paralelna horizontalnici.

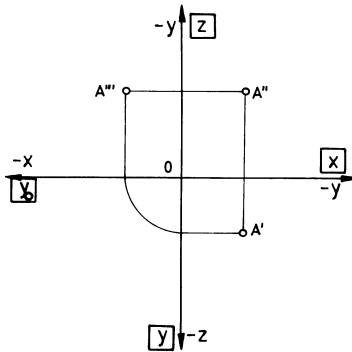
• Ortogonalno projiciranje na tri ravni

Da bi se prostorni položaj projekcijskih ravni i projekcije tačke A predstavili u jednoj ravni, potrebno je izvršiti obaranje ravni. Pri tome, vertikalnica je nepomična i predstavlja ravan crteža, a horizontalnica je zaokrenuta oko x-ose, kao što je prikazano strelicama *na sl. 1.16*. tako da njen prednji deo, onaj ispred vertikalnice, padne u položaj vertikalnice, ispod x-ose. Deo horizontalnice koji je iza vertikalnice, pošto se taj deo zaokreće prema gore, poklopiće se sa delom vertikalnice koji je iznad x-ose. Profilnica je zaokrenuta oko z-ose, tako da se njen deo ispred vertikalnice poklopi sa levom stranom vertikalnice, a deo iza vertikalnice poklopi sa desnom stranom vertikalnice. Izgled projekcijskih ravni i položaj x, y, z osa posle obaranja horizontalnice i profilnice u vertikalnicu dat je na *sl. 1.17*.



Sl. 1.17. Projekcijske ravni posle obaranja horizontalnice i profilnice

Pravila koja su važila za projekciju tačke na dve ravni u ortogonalnoj projekciji, a u odnosu na x-osu, važiće i za projekcije s obzirom na z-osu, tj. druga i treća projekcija neke tačke nalazi se na pavoju koja je normalna na z-osu, *sl. 1.18*, ili projekcije u horizontalnici i vertikalnici nalaze se na istoj ordinati (vertikalna prava), a projekcije u vertikalnici i profilnici na istoj apscisi (horizontalna prava). O primeni ortogonalne projekcije biće više reči u narednim poglavljima.



Sl. 1.18. Ortogonalna projekcija tačke na tri ravni

Crtanje ortogonalnih projekcija, biće uvek na rasklopljenom ortogonalnom trijedru O-x-y-z bez ivica projekcijskih ravni (crtaju se samo projekcijske ose) i upisuju samo uokvirene oznake x-y-z-y₀, kako je prikazano na *sl. 1.18*.

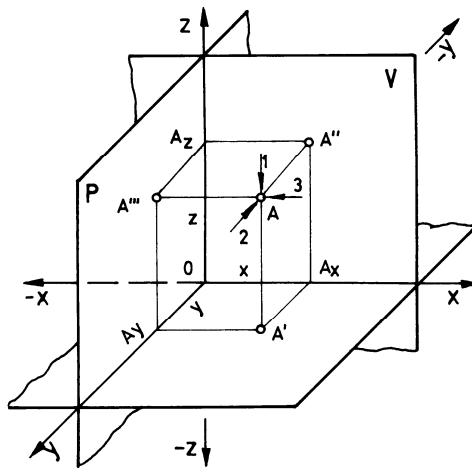
1.2.1.4. Vrednost i predznak koordinata tačke

Na *sl. 1.19*, data je kosa projekcija I oktanta (osnovni oktant) i proizvoljan položaj tačke A u prostoru. Tačka A je definisana u prostornom sistemu pomoću tri koordinate x, y, z. Piše se: A(x;y;z). Koordinate se odvajaju (;) i stavljaju u malu zagradu. Vrednosti koordinata za tačku daju se u mm i ovim redosledom: (x;y;z).

Koordinate x, y, z predstavljaju udaljenje tačke u prostoru od projekcijskih ravni. Tako udaljenost izmerena od koordinatnog početka O po pravcu:

- x-ose je udaljenje tačke A od profilnice i naziva se prva koordinata, ili apscisa i obeležava se sa x. Za ovu koordinatu važi: $OA_x = A'A_y = A''A_z = AA''' = x$.
- y-ose je udaljenje tačke A od vertikalnice i naziva se druga koordinata, ili ordinata i obeležava se sa y. Za ovu koordinatu važi: $OA_y = A'A_x = A'''A_z = AA'' = y$.

- z-ose je udaljenje tačke A od horizontalnice i naziva se treća koordinata ili aplikata i obeležava se sa z. Za ovu koordinatu važi: $OA_z = A'''A_y = A''A_x = AA''' = z$.



Sl. 1.19. Položaj koordinata u osnovnom oktantu

Prvu i drugu koordinatu nazivamo udaljenje, a treću visina.

Kako predznak koordinata x, y, z određuje položaj tačke u prostoru, to se pomoću predznaka koordinata lako može odrediti pripadnost tačke oktantu:

$$I(x;y;z), II(x;-y;z), III(x;-y;-z), IV(x;y;-z),$$

$$V(-x;y;z), VI(-x;-y;z), VII(-x;-y;-z), VIII(-x;y;-z).$$

Na osnovu sl. 1.15. i 1.16. i prethodnih objašnjenja može se zaključiti:

1. Koordinata x ima pozitivan predznak (+) u oktantima koji se nalaze desno od profilnice (I,II,III,IV), a negativan predznak (-) u svim oktantima koji se nalaze levo od profilnice (V,VI,VII,VIII).
2. Koordinata y ima pozitivan predznak (+) u svim oktantima koji se nalaze ispred vertikalnice (I,IV,V,VIII), a negativan predznak (-) u oktantima koji se nalaze iza vertikalnice (II,III,VI,VII).
3. Koordinata z ima pozitivan predznak (+) u oktantima koji se nalaze iznad horizontalnice (I,II,V,VI), a negativan predznak (-) u oktantima koji se nalaze ispod horizontalnice (III,IV,VII,VIII).

1.2.1.5. Položaj projekcija i pripadnost tačke

Položaj prve i druge projekcije tačke u odnosu na x-osu i treće projekcije u odnosu na z-osu potpuno određuje položaj i pripadnost tačke u prostoru. Ako se prva i druga projekcija nalaze sa različitih strana x-ose, tačka pripada nekom od neparnih oktanata (I,III,V,VII) ili ako su obe projekcije iznad x-ose, odnosno ispod x-ose, tačka će biti u jednom od parnih oktanata (II,IV,VI,VIII). Razmatrajući, moguće položaje tačke, može se zapaziti:

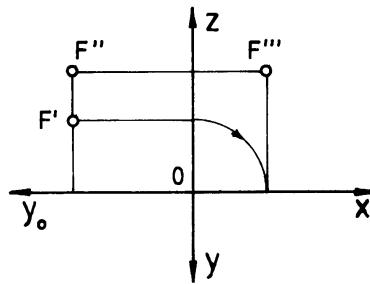
- Kada je prva projekcija tačke ispod x-ose, a druga projekcija iznad x-ose i ako je koordinata sa pozitivnim predznakom tačka se nalazi u I(x;y;z) oktantu, ili u V(-x;y;z) oktantu ako je koordinata x sa negativnim predznakom.
- Ako je prva projekcija tačke iznad x-ose, a druga projekcija ispod x-ose tačka se nalazi u III ili VII oktantu. Ako je pritom koordinata x pozitivna tačka se nalazi u III(x;-y;-z) oktantu, a ako je koordinata x sa negativnim predznakom tačka se nalazi u VII(-x;-y;-z) oktantu.
- Kada su obe projekcije tačke (prva i druga) iznad x-ose ili ispod x-ose, tačka pripada jednom od parnih oktanata (II,IV,VI,VIII) i to: ako su obe projekcije iznad x-ose, a pritom je predznak koordinate x pozitivan, tačka pripada II(x;-y;z) oktantu, a ako je koordinata x negativna tačka se nalazi u VI(-x;-y;z) oktantu; ili ako su obe projekcije ispod x-ose, a predznak x je pozitivan, tačka se nalazi u IV(x;y;-z) oktantu, odnosno, ako je koordinata x negativna tačka se nalazi u VIII(-x;y;-z) oktantu.
- Da položaj treće projekcije u odnosu na z-osu može biti levo ili desno od nje, kako je to prikazano u tabeli 1.4.

Tabela 1.4.

Broj oktanta	Položaj treće projekcije u odnosu na z-osu	
I	Levo	
II		Desno
III		Desno
IV	Levo	
V	Levo	
VI		Desno
VII		Desno
VIII	Levo	

ZADACI: 1.1 - 1.12.

- 1.1. Koje ose koordinatnog sistema određuju: horizontalnicu, vertikalnicu i profilnicu?
- 1.2. Definirati položaj I i VI oktanta u odnosu na projekcijske ravni.
- 1.3. Koja ravan u sklopu projekcijskih ravni zauzima horizontalan, a koja vertikalni položaj?
- 1.4. Odrediti oktante u kojima ordinata ima negativan predznak.
- 1.5. U kom oktantu sve koordinate imaju pozitivan, a u kom negativan predznak?
- 1.6. Napisati predznake koordinata za I, III, V i VIII oktant.
- 1.7. Ako su obe projekcije F' i F'' tačke F iznad x -ose, levo od profilnice, u kom se oktantu nalazi tačka? Vidi *sl. 20*.



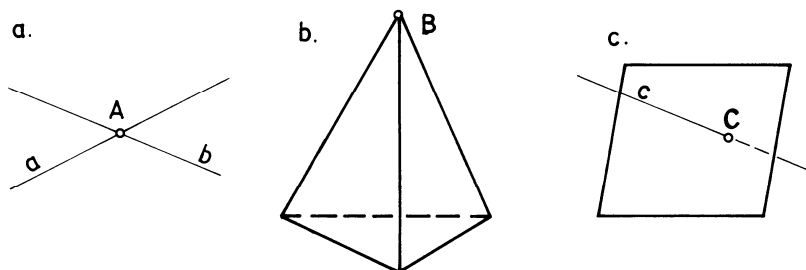
Sl. 20. Položaj tačke F u prostoru

- 1.8. Za slučaj da je prva projekcija B' iznad, a druga projekcija B'' ispod x -ose kom oktantu pripada tačka B ?
- 1.9. Kada se tačka nalazi u prostoru IV oktanta?
- 1.10. Ako se tačka u prostoru nalazi iza vertikalnice, gde će se projektovati prva projekcija tačke?
- 1.11. Gde se nalazi druga projekcija C'' tačke C u odnosu na x -osu, ako se tačka C u prostoru nalazi ispod horizontalnice?
- 1.12. Kod kojih oktanta je položaj treće projekcije u odnosu na z -osu levo?

1.20

1.3. TAČKA I NJENE PROJEKCIJE

Tačka je grafički definisana kao: presek dve prave, *sl. 1.22.a*, presek najmanje tri ravni, *sl. 1.22.b* i prodor prave kroz ravan, *sl. 1.22.c*.



Sl. 1.22. Grafičko predstavljanje tačke

Položaj tačke u ortogonalnom koordinatnom trijedru može biti proizvoljan i specijalan.

1.3.1. Proizvoljan položaj tačke u prostoru

Tačka zauzima proizvoljan položaj u prostoru kada sve tri koordinate tačke imaju različite vrednosti od nule, $A(20;30;10)$.

Na *sl. 1.23. do 1.30*, uz prostorno prikazivanje tačke i njenih projekcija u svakom oktantu posebno, date su i ortogonalne projekcije tačke, a u zavisnosti od njihovog položaja prema projekcijskim ravnima.

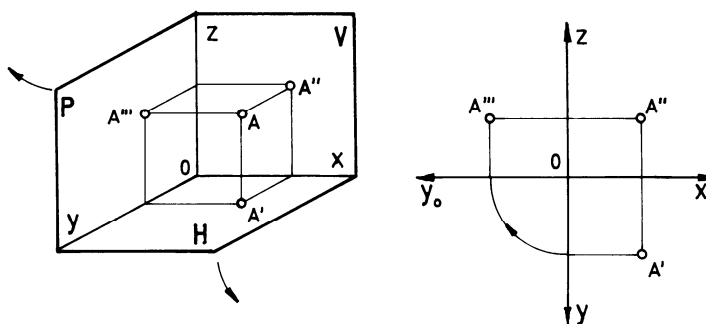
I oktant

$A(x;y;z)$

$A'(x;y)$

$A''(x;z)$

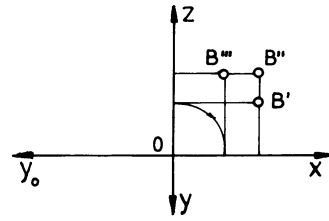
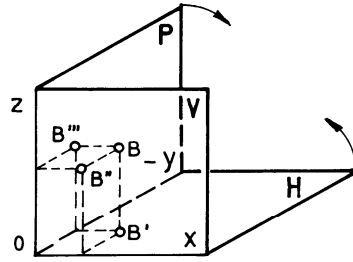
$A'''(y;z)$



Sl. 1.23. Projekcija tačke A u I oktantu

II oktant

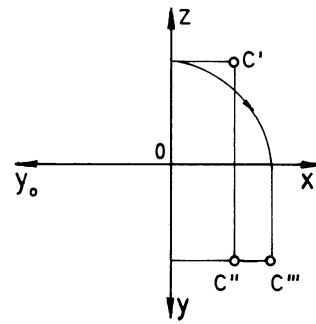
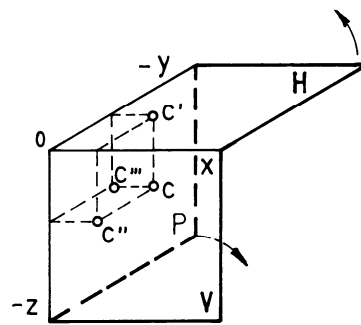
$B(x;-y;z)$
 $B'(x;-y)$
 $B''(x;z)$
 $B'''(-y;z)$



Sl. 1.24. Projekcija tačke B u II oktantu

III oktant

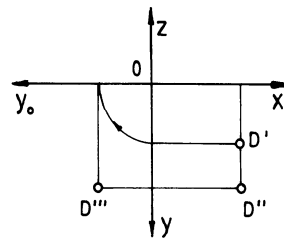
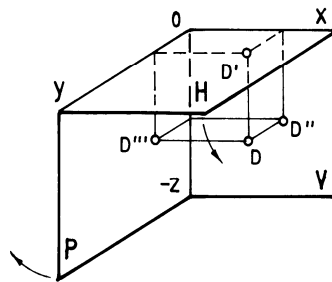
$C(x;-y;-z)$
 $C'(x;-y)$
 $C''(x;-z)$
 $C'''(-y;-z)$



Sl. 1.25. Projekcija tačke C u III oktantu

IV oktant

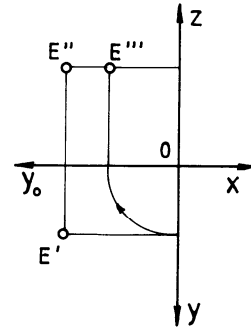
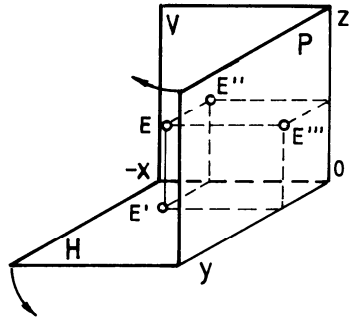
$D(x;y;-z)$
 $D'(x;y)$
 $D''(x;-z)$
 $D'''(y;-z)$



Sl. 1.26. Pprojekcija tačke D u IV oktantu

V oktant

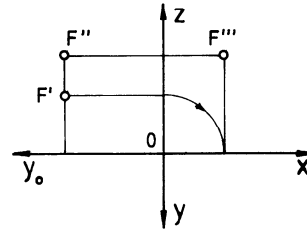
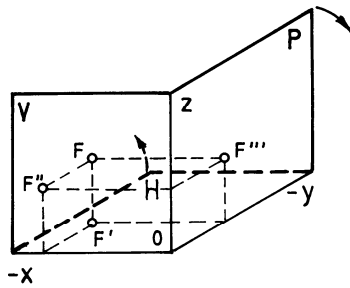
$E(-x;y;z)$
 $E'(-x;y)$
 $E''(-x;z)$
 $E'''(y;z)$



Sl. 1.27. Projekcija tačke E u V oktantu

VI oktant

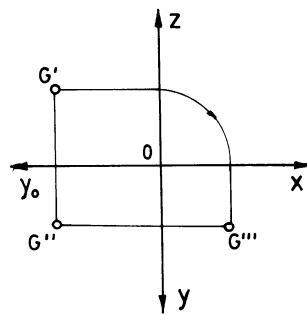
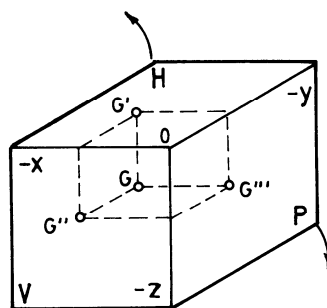
$F(-x;-y;z)$
 $F'(-x;-y)$
 $F''(-x;z)$
 $F'''(-y;z)$



Sl. 1.28. Projekcija tačke F u VI oktantu

VII oktant

$G(-x;-y;-z)$
 $G'(-x;-y)$
 $G''(-x;-z)$
 $G'''(-y;-z)$



Sl. 1.29. Projekcija tačke G u VII oktantu

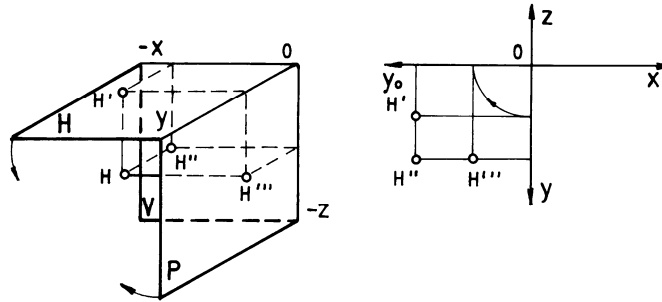
VIII oktant

$H(-x;y;-z)$

$H'(-x;y)$

$H''(-x;-z)$

$H'''(y;-z)$



Sl. 1.30. Projekcija tačke H u VIII oktantu

Na osnovu prikazanih projekcija tačaka u oktantima, treba zapaziti pravilnost koja služi i kao kontrola rešenog zadatka da:

- prva i druga projekcija proizvoljne tačke u prostoru moraju uvek ležati na pravcu koji je normalan na x-osu, a
- druga i treća projekcija iste tačke moraju ležati na jednom pravcu koji je paralelan sa x-osom.

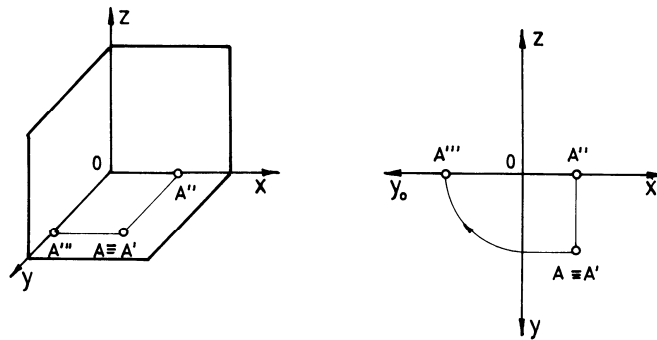
1.3.2. Specijalan položaj tačke

Tačka je u specijalnom položaju kada leži u jednoj od projekcijskih ravni, odnosno kada je na jednoj od osa sistema.

- **Tačka leži u projekcijskoj ravni**

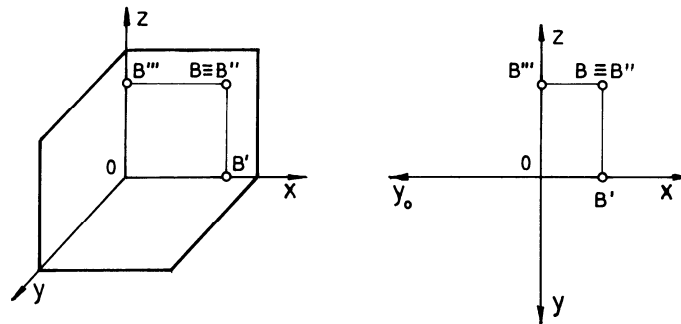
Kada jedna od koordinata tačke ima vrednost nula, $A(x;y;0)$, $B(x;0;z)$, $C(0;y;z)$, tada tačka leži u ravni koju druge dve koordinate definišu. Udaljenost tačke od ravni, u kojoj leži, jednaka je nuli, a u istoj ravni se nalazi i odgovarajuća projekcija tačke. Druge dve projekcije se nalaze na osama koordinatnog sistema. Na sl. 1.31, 1.32. i 1.33. uz prostorno prikazivanje tačaka A, B, C u specijalnom položaju, date su i ortogonalne projekcije istih tačaka.

Na sl. 1.31. gde je prikazan položaj tačke $A(x;y;0)$ u prostoru i ortogonalne projekcije iste tačke, vidi se da ako je $z=0$, tačka A i njena prva projekcija A' leže u ravni horizontalnice. Druge dve projekcije A'' i A''' se nalaze na x i y-osi.



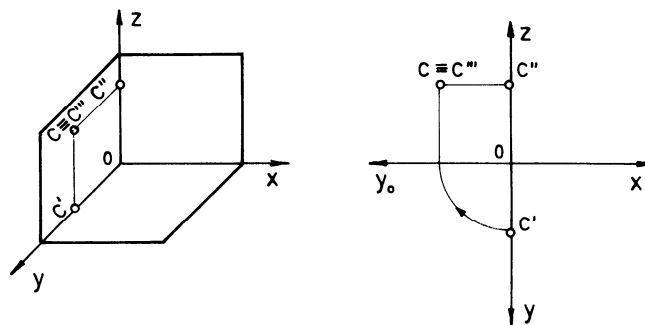
Sl. 1.31. Tačka $A(x; y; 0)$ leži u horizontalnici

Kada je koordinata $y=0$, sl. 1.32, tačka B leži u vertikalnici. U ovoj ravni, takođe leži i njena odgovarajuća, druga projekcija B'' , dok druge dve projekcije B' i B''' leže na x, odnosno z-osi.



Sl. 1.32. Tačke $B(x; 0; z)$ leži u vertikalnici

Za slučaj, kada je koordinata $x=0$, sl. 1.31, tačka C i odgovarajuća projekcija C''' leže u ravni profilnice. Druge dve projekcije C' i C'' leže na y-osi, odnosno z-osi.

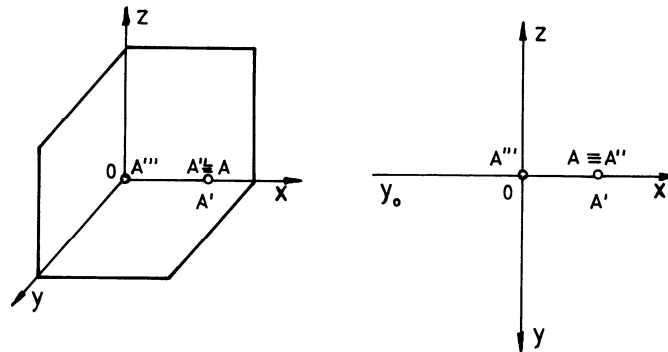


Sl. 1.33. Tačka $C(0; y; z)$ leži u profilnici

• **Tačka leži na osi sistema**

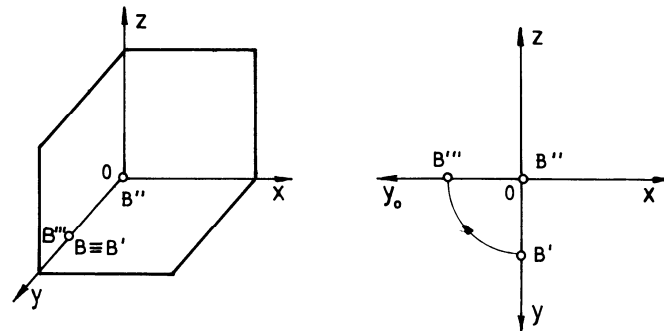
Tačke $A(x;0;0)$, $B(0;y;0)$ i $C(0;0;z)$ čije su vrednosti dveju koordinata jednake nuli, a treća različita od nule, leže na osi one koordinate čija je vrednost različita od nule. Dve projekcije nalaze se gde i sama tačka, a treća u početku koordinatnog sistema.

Na *sl. 1.34.* prikazan je slučaj kada tačka $A(x;0;0)$ leži na x-osi. Kako je x-osa projekcijska osa horizontalnice i vertikalnice, odnosno prve i druge projekcijske ravni, izvesno je da će u tački A biti prva A' i druga A'' projekcija. Treća projekcija A''' po definiciji biće u koordinatnom početku.



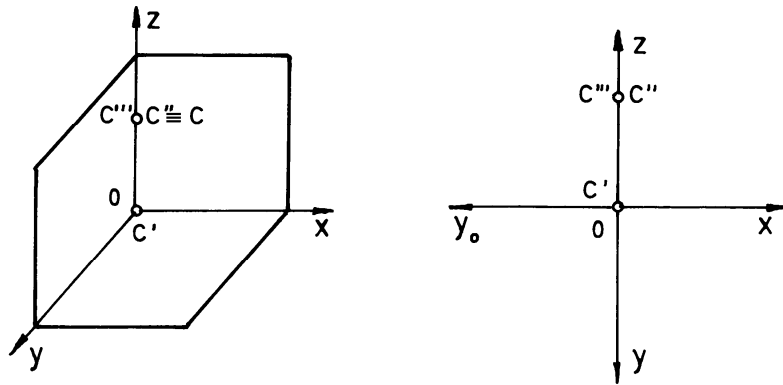
Sl. 1.34. Tačka $A(x;0;0)$ leži na x-osi

Tačka $B(0;y;0)$, *sl. 1.35.* čije koordinate x i z imaju vrednost nula, leži na y-osi. Na y-osi biće i prva B' i treća B''' , projekcija tačke B. Druga projekcija B'' , tačke B ležaće u koordinatnom početku.



Sl. 1.35. Tačka $B(0;y;0)$ na y-osi

Kako tačka $C(0;0;z)$ ima dve koordinate čije su vrednosti jednake 0, *sl. 1.36.* tačka C će po definiciji ležati na z-osi. U istoj tački C ležaće i druga C'' i treća C''' projekcija, jer je z-osa presek druge i treće projekcijske ravni. Prva projekcija C' , tačke C, ležaće u koordinatnom početku.

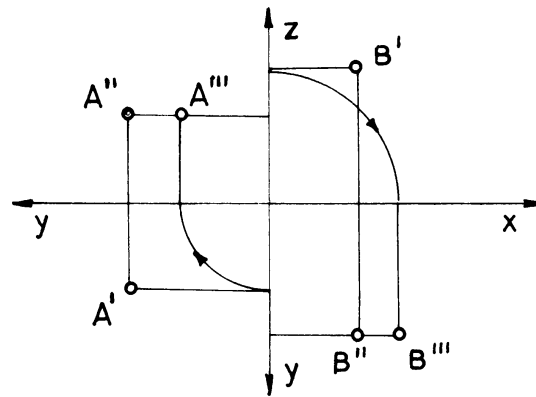


Sl. 1.36. Tačka $C(0;0;z)$ leži na z -osi

ZADACI: 1.13. - 1.24.

- 1.13. Tačka A se nalazi ispred vertikalnice, a ispod horizontalnice. Odredi kom kvadrantu pripada tačka A.
- 1.14. Tačka A leži u vertikalnici (V), 20mm ispod horizontalnice, 15mm levo od profilnice. Nacrtati sve tri projekcije i odrediti pripadnost tačke.
- 1.15. Analizirajući opšti položaj tačke A u V (petom) oktantu, obrazložiti pod kojim se uslovom druga i treća projekcija mogu poklapati.
- 1.16. Nacrtati sve tri projekcije tačaka A i B i napisati kom oktantu pripada svaka od zadatih tačaka. $A(15;20;20)$, $B(10;-25;-20)$.
- 1.17. Odrediti sve tri projekcije sledećih tačaka: $A(50;75;60)$, $B(35;0;55)$, $C(55;0;-10)$, $D(50;-40;-60)$, $E(60;-15;40)$.
- 1.18. Tačka $A(20;-20;?)$ leži u horizontalnici. Nacrtati sve tri projekcije tačke A i napisati u kom oktantu leži tačka.
- 1.19. Tačka $A(25;?;-15)$ pripada vertikalnici. Nacrtati sve tri projekcije zadate tačke.
- 1.20. Odrediti nedostajuće koordinate tačaka $A(50;?;20)$, $B(-15;?;40)$, $C(30;?;-15)$, $D(-50;?;-25)$ koje leže u ravni vertikalnice. Nacrtati sve tri projekcije.
- 1.21. Nacrtati sve tri projekcije tačaka A i B. Tačke leže u osama prostornog sistema. $A(??;-20)$, $B(??;20;?)$.
- 1.22. Definisati pripadnost tačke A pod uslovom da njena prva projekcija A' leži u koordinatnom početku, a druga i treća projekcija A'' i A''' su iznad horizontalnice, na z -osi i poklapaju se.

- 1.23. Na *sl. 1.37.* nacrtane su projekcije tačke *A* i *B*. Měrenjem odrediti koordinate tačke *A* i *B* i napisati kom oktantu pripadaju zadate tačke.

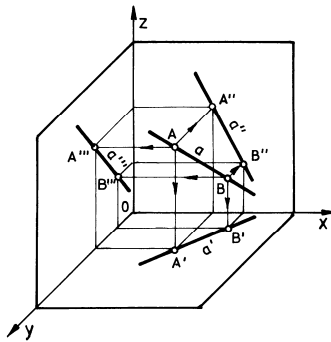


Sl. 1.37. Projekcije tačke A i B

- 1.24. Analizirajući opšti položaj tačke *A* u V (petom) oktantu, obrazložiti pod kojim se uslovom druga i treća projekcija mogu poklapati.

1.4. PRAVA I NJENE PROJEKCIJE

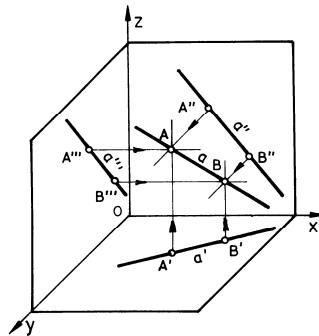
1.4.1. Projekcije prave



Sl. 1.38. Položaj prave u osnovnom oktantu

Na sl. 1.38. prikazana je prava a koju definišu dve tačke A i B . Da bi se odredile projekcije prave na projekcijskim ravnima moraju se odrediti projekcije tačaka te prave. Znači, pri određivanju projekcija bilo koje prave ili duži potrebno je da se odrede projekcije njenih karakterističnih tačaka, a zatim spajanjem tih projekcija crtaju se projekcije prave. Tako na primer, u odgovarajućim projekcijskim ravnima, u I oktantu, sl. 1.38. projicirane su odgovarajuće projekcije tačaka A i B . Spajanjem *prvih projekcija* tačaka $A'-B'$ određuje se položaj prve projekcije prave a' . Analogno ovom postupku, spajanjem $A''-B''$, odnosno $A'''-B'''$ dobija se druga i treća projekcija a'' i a''' prave a . Zapaža se da su sve projekcije prave prave linije.

• Projeciranje prave u prostoru



Sl. 1.39. Projeciranje prave u prostoru

Postupak projiciranja prave a u prostoru, na osnovu zadatih projekcija a' , a'' , a''' , prikazan je pomoću *sl. 1.39*. U osnovnom oktantu prostorno su prikazane sve tri projekcije a' , a'' i a''' prave a . Iz karakterističnih projekcijskih tačaka (A' , A'' , A''' i B' , B'' , B'''), koje leže na datim projekcijama a' , a'' , a''' prave a , povučeni su projektujuć zraci. U preseku zraka povučениh iz A' , A'' i A''' dobija se tačka A . Istim postupkom određuje se i tačka B . Po određivanju položaja tačaka A i B u prostoru i njihovim povezivanjem definisan je položaj prave a u prostoru.

- **Ortogonalno projiciranje prave**

Ortogonalne projekcije prave na tri ravni svodi se na postupak projiciranja dveju tačaka te prave i njihovo povezivanje u istoimenim projekcijama.

1.4.2. Položaj prave u prostoru

Položaj prave u prostoru dobija se određivanjem položaja tačaka kojim je definisana i njihovim povezivanjem. U prostoru, položaj prave može biti određen:

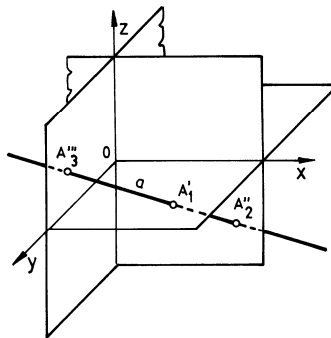
- dvema tačkama,
- jednom tačkom i uslovom da je prava upravna na projekcijsku ravan,
- jednom tačkom i uslovom da je prava paralelna projekcijskoj ravni.

Prava u prostoru može zauzimati dva karakteristična položaja:

- proizvoljan ili opšti i
- specijalan.

1.4.2.1. Proizvoljan položaj prave

Prava se nalazi u proizvoljnom, odnosno opštem položaju u prostoru kada prodire - prolazi kroz sve tri projekcijske ravni, *sl. 1.40*. Prava prema



Sl. 1.40. Proizvoljan položaj prave u prostoru

projekcijskim ravnima: horizontalnici, vertikalnici i profilnici stoji koso - pod uglom prema svim projekcijskim ravnima. Uglove koje prava zahvata sa projekcijskim ravnima su tzv. nagibni uglovi.

1.4.2.2. Specijalan položaj prave

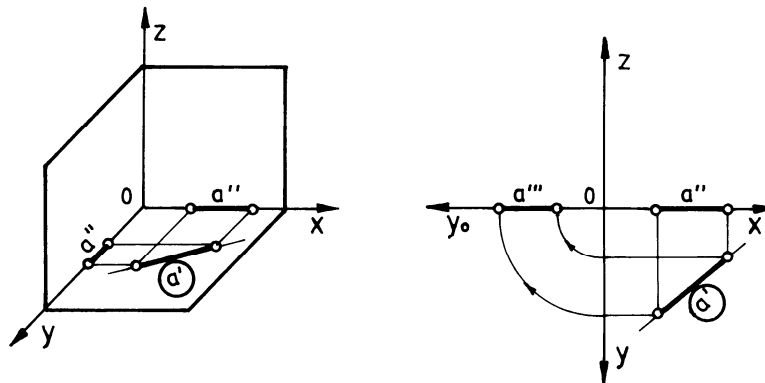
Prava zauzima specijalan položaj kada je:

- u jednoj od projekcijskih ravni (prava leži u ravni),
- paralelna sa jednom od projekcijskih ravni,
- upravna na jednu od projekcijskih ravni i
- na jednoj od koordinatnih osa.
-

Ako prava leži u jednoj od projekcijskih ravni, prava i projekcija prave u toj ravni vide se u pravoj veličini. Druge dve projekcije leže na osama koje tu ravan definišu, a po jedna koordinata karakterističnih tačaka prave ima vrednost nula.

◦ Prava leži u horizontalnici

Na *sl. 1.41.* je prikazana prava $a[A(x_1; y_1; 0), B(x_2; y_2; 0)]$ i njene projekcije u kosoj i ortogonalnoj projekciji. U datom slučaju je prva projekcija prave a' ujedno i prava veličina prave ($a' \equiv a$), dok je druga projekcija prave a'' na x -osi, a treća projekcija prave a''' na y -osi.

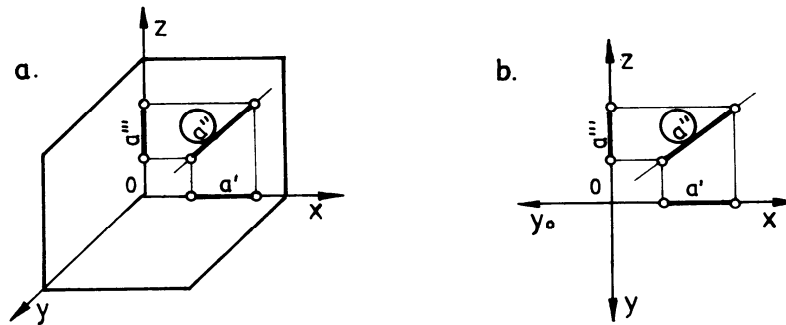


Sl. 1.41. Projekcije prave koja leži u horizontalnici

◦ Prava leži u vertikalnici

Prava sa koordinatama njenih karakterističnih tačaka $A(x_1; 0; z_1)$ i $B(x_2; 0; z_2)$ i njene projekcije predstavljene su u kosoj i ortogonalnoj projekciji na *sl. 1.42.a.* i *sl. 1.42.b.* Pri ovom položaju prave, prava

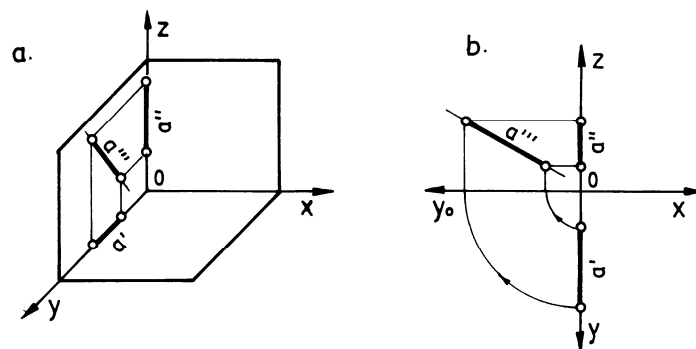
projekcija prave a' je na x-osi, druga projekcija a'' je istovremeno prava veličina prave i leži u vertikalnici, ($a'' \equiv a$), a treća projekcija a''' prave a je na z-osi.



Sl. 1.42. Projekcije prave koja leži u vertikalnici

◦ Prava leži u profilnici

Za pravu $a[A(0;y_1;z_1), B(0;y_2;z_2)]$ i njene projekcije date u kosoj i ortogonalnoj projekciji, sl. 1.43.a. i 1.43.b, karakteristično je da prva projekcija prave a' leži na y-osi, druga projekcija prave a'' na z-osi, a treća projekcija a''' leži u profilnici i poklapa se sa pravom veličinom prave ($a''' \equiv a$).



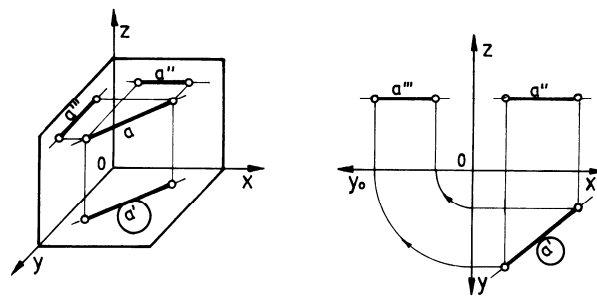
Sl. 1.43. Projekcije prave koja leži u profilnici

● Prava paralelna sa projekcijskom ravni

Prava je paralelna sa projekcijskom ravni ako po jedna istoznačna koordinata njenih karakterističnih tačaka ima istu vrednost.

Ako je prava paralelna sa jednom od projekcijskih ravni, tada se projekcija prave u paralelnoj ravni vidi u pravoj veličini. Druge dve projekcije te prave su paralelne sa osama koje tu ravan definišu.

◦ **Prava paralelna sa horizontalnicom**

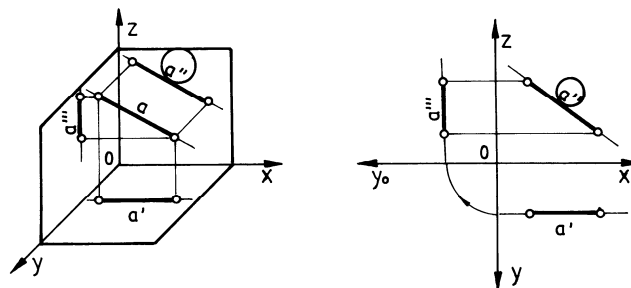


Sl. 1.44. Projekcije prave paralelne sa ravan H

Data prava $a[A(x_1; y_1; z), B(x_2; y_2; z)]$ je paralelna sa horizontalnicom, sl. 1.44, jer je udaljenost njenih karakterističnih tačaka od horizontalnice ista, odnosno koordinate z su jednake. Prva projekcija a' je paralelna sa horizontalnicom i predstavlja pravu veličinu prave a . Druga projekcija a'' je paralelna sa x -osom, a treća a''' je paralelna sa y -osom. Udaljenost druge projekcije a'' od x -ose i udaljenost treće projekcije a''' od y -ose, predstavlja stvarno udaljenje prave u prostoru od horizontalnice. Ugao između prve projekcije a' i x -ose predstavlja drugi nagibni ugao koji prava a zaklapa sa vertikalnicom.

◦ **Prava paralelna sa vertikalnicom**

Prava $a[A(x_1; y; z_1), B(x_2; y; z_2)]$ paralelna sa vertikalnicom, sl. 1.45, jer je udaljenost njenih karakterističnih tačaka od vertikalnice ista, tj. koordinate y su jednake. Prva projekcija a' i treća projekcija prave a''' paralelne su odgovarajućim osama x i z . Druga projekcija a'' je paralelna sa vertikalnicom i predstavlja pravu veličinu prave a .

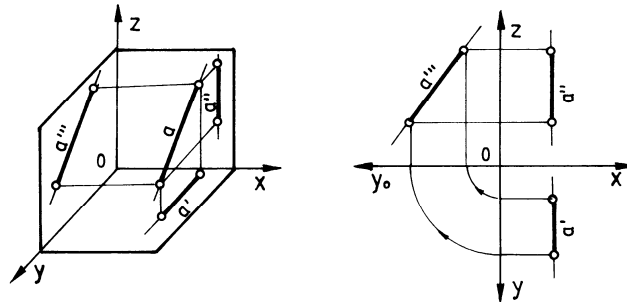


Sl. 1.45. Projekcije prave paralelne sa ravan V

Udaljenost prve projekcije prave a' od x -ose i treće projekcije prave a''' od z -ose, predstavlja udaljenost prave a od vertikalnice.

Ugao između druge projekcije a'' i x-ose je prvi nagibni ugao i jednak je uglu koji prava a zaklapa sa horizontalnicom.

◦ **Prava paralelna sa profilnicom**

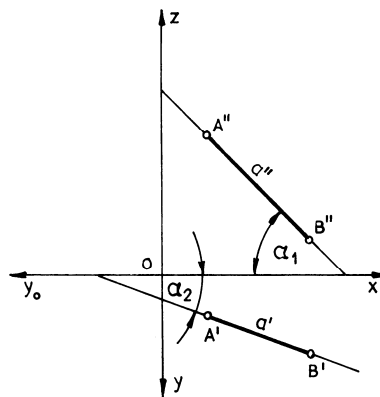


Sl. 1.46. Projekcije prave paralelne sa ravan P

Kako je prava $a[A(x;y_1;z_1), B(x;y_2;z_2)]$ paralelna sa profilnicom, sl. 1.46, to je udaljenost njenih karakterističnih tačaka od profilnice ista, a njihove koordinate x su jednake. Prva projekcija prave a' je paralelna sa y -osom. Druga projekcija prave a'' paralelna je sa z -osom, dok je treća projekcija a''' paralelna sa profilnicom i predstavlja pravu veličinu prave a . Rastojanje prve projekcije a' od y -ose, odnosno druge projekcije a'' od z -ose odgovara stvarnom udaljenju prave a od profilnice.

• **Nagibni uglovi prava u specijalnom položaju**

α_1 - prvi nagibni ugao zaklapa prava a sa horizontalnom projekcijskom ravni ukoliko je prava paralelna vertikalnoj projekcijskoj ravni, sl. 1.47, a veličina se očitava između druge projekcije a'' prave a i x-ose.



Sl. 1.47. Nagibni uglovi specijalnih prava

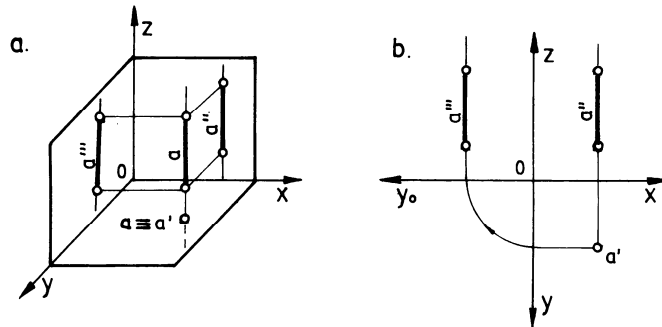
α_2 - drugi nagibni ugao je ugao između prave a i vertikalnice ukoliko je prava paralelna horizontalnoj projekcijskoj ravni, a njegova veličina se vidi između prve projekcije a' prave a i x-ose.

• **Prava normalna na projekcijsku ravan**

Da bi prava bila normalna na projekcijsku ravan neophodno je da dve istoznačne koordinate karakterističnih tačaka prave imaju istu vrednost.

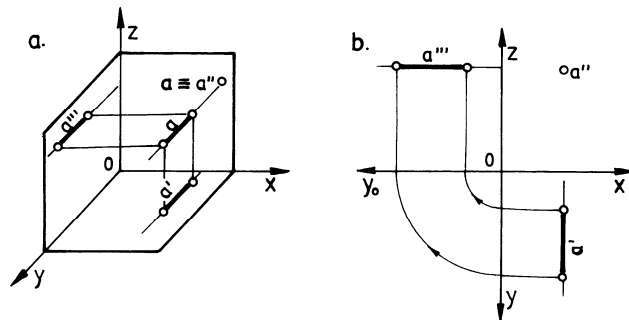
◦ **Prava normalna na horizontalnicu**

Prava $a[A(x;y;z_1), B(x;y;z_2)]$ je normalna na horizontalnicu. Sa *sl. 1.48.a.* i *sl. 1.48.b.* može se zapaziti da je prva projekcija prave a' tačka, jer se projekcije karakterističnih tačaka prave a u toj projekciji poklapaju tj. nalaze se na istom projekcijskom zraku. Druga projekcija prave a'' je normalna na x-osu. Treća projekcija prave a''' je normalna na y-osu. Prava veličina prave a se očitava iz druge i treće projekcije ($a \equiv a'' \equiv a'''$).



Sl. 1.48. Projekcije prave normalne na ravan H

◦ **Prava normalna na vertikalnicu**

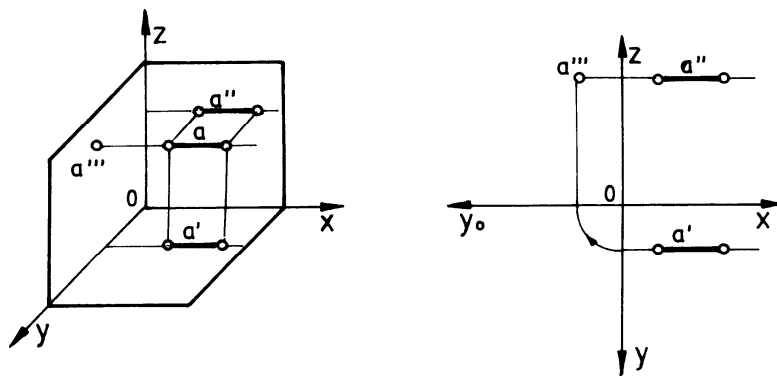


Sl. 1.49. Projekcija prave normalne na ravan V

Koordinate karakterističnih tačaka prave $a[A(x_1;y_1;z), B(x_2;y_2;z)]$, na *sl. 1.49.a* i *sl. 1.49.b*, pokazuju da je ispunjen uslov da je prava a normalna na vertikalnicu. Prva projekcija prave a' je normalna na x -osu. Druga projekcija prave a'' je tačka, jer se projekcije karakterističnih tačaka prave poklapaju i na istom su projekcijskom zraku. Treća projekcija prave a''' je normalna na z -osu. Prava veličina prave a vidi se u prvoj i trećoj projekciji ($a \equiv a' \equiv a'''$).

◦ **Prava normalna na profilnicu**

Kada je prava a normalna na profilnicu, *sl. 1.50*, onda se projekcije karakterističnih tačaka prave u profilnici poklapaju, odnosno treća projekcija a''' prave $a[A(x_1;y;z), B(x_2;y;z)]$ se vidi u profilnici kao tačka. Prva projekcija prave a' normalna je na y -osu, a druga projekcija prave a'' je normalna na z -osu. Stvarna veličina se vidi u prvoj i drugoj projekciji ($a \equiv a' \equiv a''$).



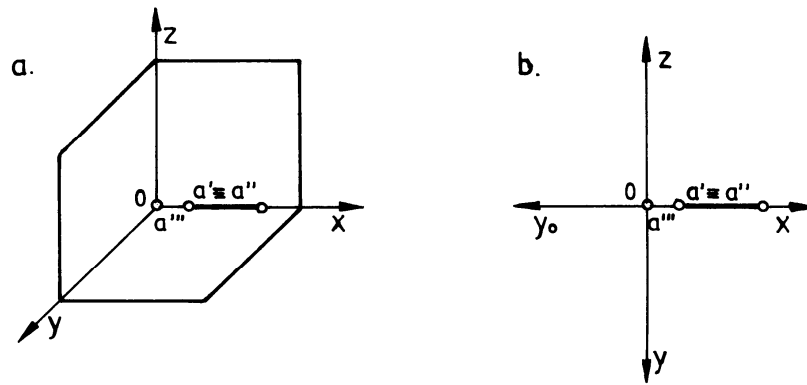
Sl. 1.50. Projekcije prave normalne na ravan P

• **Prava na projekcijskoj osi**

Da bi prava ležala na projekcijskoj osi potrebno je da dve jednoznačne koordinate karakterističnih tačaka imaju vrednost nula. Prava leži na onoj projekcijskoj osi čije su vrednosti koordinata karakterističnih tačaka različite od nule.

◦ **Prava leži na x-osi**

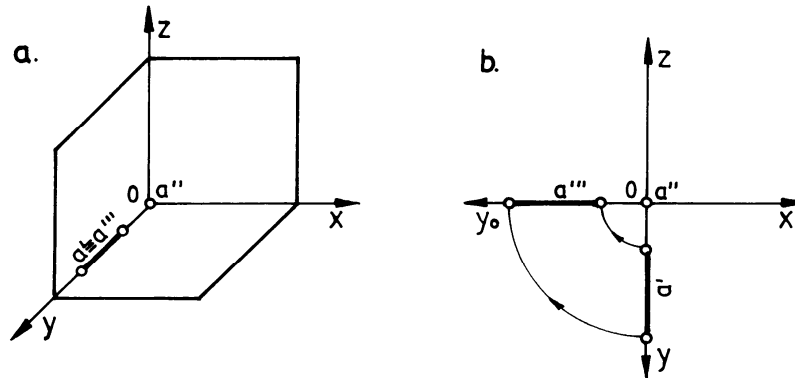
Kako prava na *sl. 1.51.a* i *sl. 1.51.b*, $a[A(x_1;0;0), B(x_2;0;0)]$ leži na x -osi, biće: Prva i druga projekcija prave a' i a'' leže na x -osi. Treća projekcija



Sl. 1.51. Projekcija prave koja leži na x-osi

prave a''' je tačka i u centru je koordinatnog sistema. Prava veličina je u prvoj i drugoj projekciji.

◦ Prava leži na y-osi



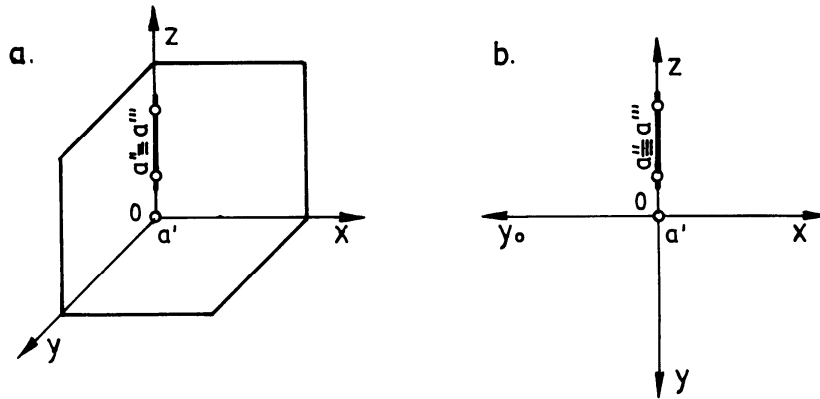
Sl. 1.52. Projekcija prave koja leži na y-osi

Na sl. 1.52.a. i sl. 1.52.b. je prikazana prava $a[A(0;y_1;0), B(0;y_2;0)]$ koja leži na y-osi. U ovom slučaju, prva i treća projekcija prave a' i a''' je na y-osi. Druga projekcija prave a'' je tačka i poklapa se sa centrom koordinatnog sistema. Prava veličina vidi se u prvoj i trećoj projekciji.

◦ Prava leži na z-osi

Koordinate karakterističnih tačaka prave $a[A(0;0;z_1), B(0;0;z_2)]$ ukazuju da prava a leži na z-osi, sl. 1.53.a. i 1.53.b. Prva projekcija prave a' je

tačka i u centru je koordinatnog sistema. Druga i treća projekcija prave a'' i a''' je na z-osi. Prava veličina se vidi u drugoj i trećoj projekciji.

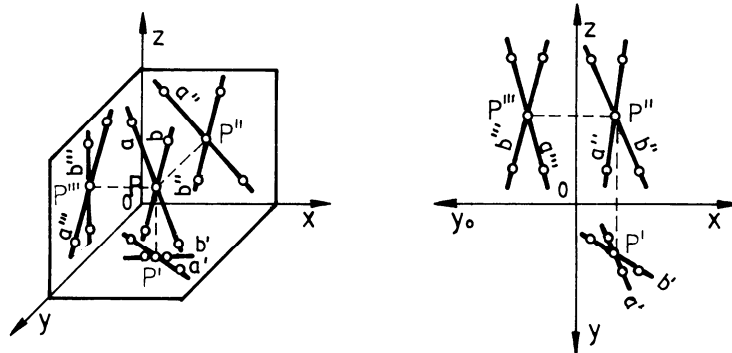


Sl. 1.53. Projekcije prave koja leži na z-osi

1.4.2.3. Međusobni položaj dve prave

Dve prave, u prostoru, imaju tri karakteristična uzajamna položaja. Mogu da se seku, ukrštaju (mimoilaze) i da budu paralelne. Projekcija dve i više pravih zasniva se na pravilima projektovanja jedne prave.

◦ Prave se seku

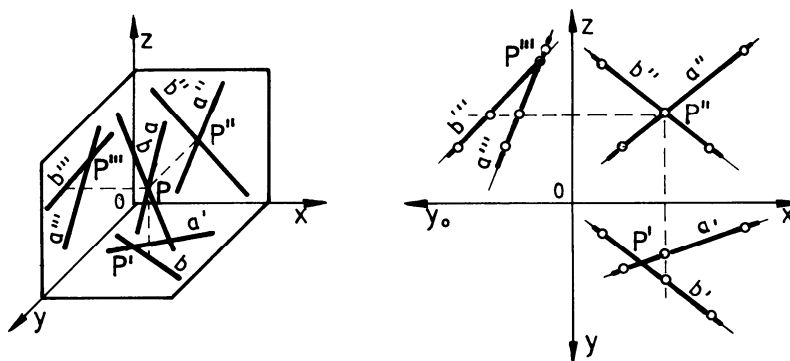


Sl. 1.54. Projekcije dve prave koje se seku

Ako dve prave imaju zajedničku tačku, projekcije te tačke pripadaju istoimenim projekcijama svake od tih prava. U opštem slučaju, dve prave se seku, ako leže u jednoj ravni, a projekcije preseka P' i P'' , sl. 1.54, se nalaze na istoj ordinati-sponi, odnosno projekcije preseka P' i P''' na istom pravcu koji je paralelan sa x-osom.

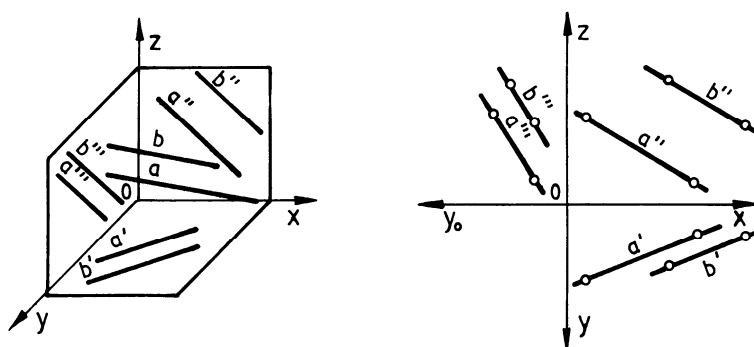
◦ **Prave se mimoilaze**

Na *sl. 1.55.* prikazane su projekcije dve prave koje se mimoilaze (ukršstaju). Dve prave se mimoilaze ako im se projekcije preseka P' i P'' ne nalaze na istoj ordinati.



Sl. 1.55. Projekcije dveju pravih koje se mimoilaze

◦ **Prave su paralelne**



Sl. 1.56. Projekcije dveju paralelnih prava

Da bi dve prave bile paralelne, *sl. 1.56.*, njihove istoimene projekcije moraju biti paralelne: $a' \parallel b'$; $a'' \parallel b''$; $a''' \parallel b'''$. Međutim, ovo pravilo ne važi za slučaj kada su prave paralelne sa jednom projekcijskom ravni. Rešenje treće projekcije za takav slučaj pokazuje da se prave mimoilaze.

1.4.2.4. Prodor prave kroz projekcijske ravni

Prava koja se ne nalazi u nekom specijalnom položaju prodire kroz sve tri projekcijske ravni, *sl. 1.57.* Tačke kroz koje prava **a** prodire projekcijske ravni zovu se tragovi prave ili prodori prave i obeležavaju se sa **P**.

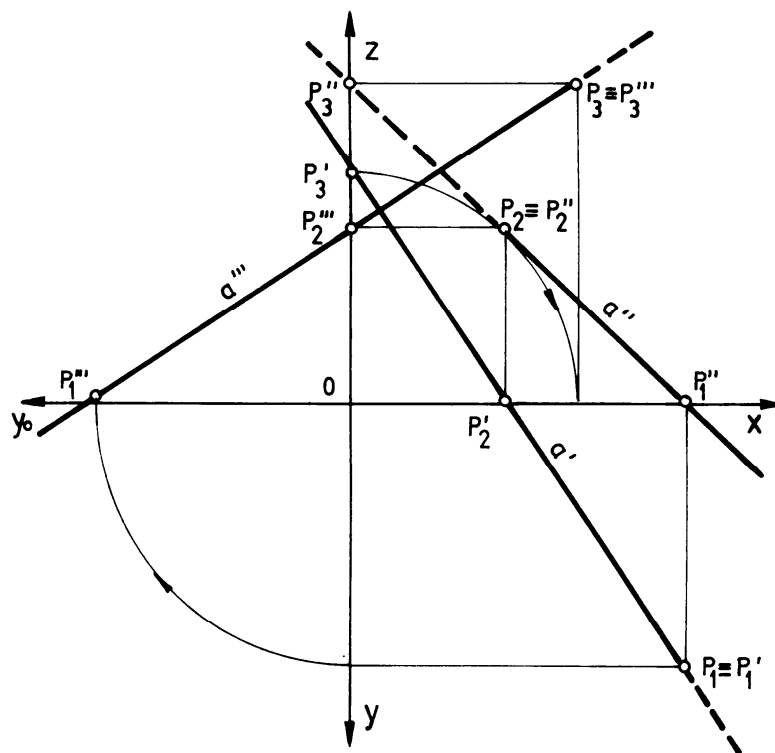
S obzirom na broj projekcijskih ravni, prava u proizvoljnom položaju prodire kroz tri ravni. Tako je:

- tačka prodora u horizontalnici - **prvi trag prave (P₁)**,
- tačka prodora u vertikalnici - **drugi trag prave (P₂)** i
- tačka prodora u profilnici - **treći trag prave (P₃)**.

Kako tačke prodora pripadaju istovremeno i pravoj i projekcijskoj ravni, tačke prodora će biti istovremeno i projekcije u odgovarajućoj ravni ($P_1 \equiv P_1'$, $P_2 \equiv P_2''$, $P_3 \equiv P_3'''$). Takođe, sa *sl. 1.57.* može se videti da je na mestima prodora, P₁, P₂, P₃, granica vidljivog i nevidljivog dela prave, što u daljem razmatranju omogućuje lako određivanje vidljivosti njenih projekcija.

◦ **Određivanje tragova prave**

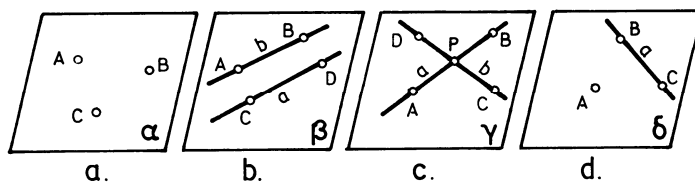
Na *sl. 1.57.* dato je objašnjenje za nalaženje tragova prave i njene projekcije u sve tri projekcijske ravni. S obzirom da se trag prave nalazi u ravni, jedna projekcija traga prave poklopiće se sa tragom prave, a druge dve projekcije traga prave nalaziće se na odgovarajućim projekcijskim osama.



Sl. 1.57. Tragovi prave i njene projekcije

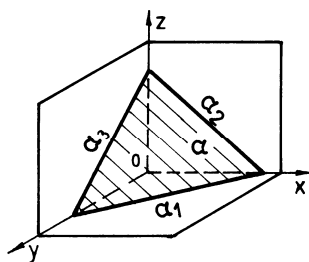
1.5. RAVAN I NJENE PROJEKCIJE

Ravan, kao neograničeni deo površine, definišu tri nekolinearne tačke, *sl. 1.59.a*, dve paralelne prave, *sl. 1.59.b.*, dve prave koje se seku *sl. 1.59.c.* i prava i tačka van nje, *sl. 1.59.d.*



Sl. 1.59. Način definisanja ravni

1.5.1. Prikazivanje ravni tragovima



Sl. 1.60. Tragovi ravni na projekcijskim ravnima

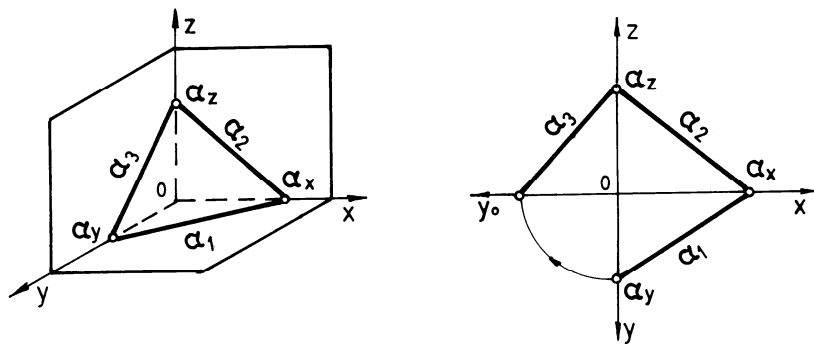
Na *sl. 1.60.* je ravan α prikazana tragovima ravni. Tragovi ravni su prave nastale presekom ravni (u opštem ili specijalnom položaju) i projekcijskih ravni. Tako je:

- u horizontalnici, **prvi trag ravni- α_1** ,
- u vertikalnici, **drugi trag ravni- α_2** i
- u profilnici, **treći trag ravni- α_3** .

Na osnovu prethodnih objašnjenja, prostornog i ortogonalnog prikaza tragova ravni na *sl. 1.61.* može se zapaziti da su tragovi ravni prave - koje leže u projekcijskim ravnima u specijalnom položaju i da će njihova jedna projekcija biti u samoj ravni na mestu samog traga, a druge dve projekcije

će biti na osama te projekcijske ravni. Pošto presek horizontalnice i vertikalnice čini x-osu, to znači da će se prvi i drugi trag ravni seći na x-osi. Takođe, na osnovu dosadašnjeg saznanja može se zaključiti da će se prvi i treći trag ravni seći na y-osi, a drugi i treći trag ravni na z-osi. Tačke u kojim se seku tragovi ravni na x, y i z-osi zovu se osni tragovi projekcijskih ravni, odnosno prodori koordinatnih osa kroz datu ravan. Odstojanja osnih tragova od koordinatnog početka predstavljaju tzv. odsečke koje posmatrana ravan čini na koordinatnim osama. Oni se označavaju:

- sa α_x - odsečak na x-osi,
- sa α_y - odsečak na y-osi i
- sa α_z - odsečak na z-osi.



Sl. 1.61. Prostorni i ortogonalni prikaz tragova ravni

Svaki od ovih odsečaka određen je svojim koordinatama:

- odsečak na x-osi, α_x definisan je koordinatama $\alpha_x(x;0;0)$
- odsečak na y-osi, α_y određen je koordinatama $\alpha_y(0;y;0)$
- odsečak na z-osi, α_z , definisan je koordinatama $\alpha_z(0;0;z)$

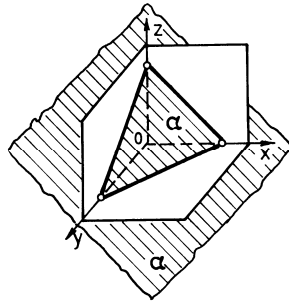
1.5.2. Proizvoljan položaj ravni

Za ravan α , sl. 1.62. se kaže da je u proizvoljnom položaju u prostoru ako seče sve tri projekcijske ravni.

Pored opšteg položaja, ravan u prostoru može zauzimati i specijalne položaje i to:

- ravan može biti normalna na jednu od projekcijskih ravni, odnosno paralelna jednoj od projekcijskih osa i

- ravan može biti paralelna sa jednom od projekcijskih ravni, odnosno normalna na jednu od osa.



Sl. 1.62. Proizvoljan položaj ravni

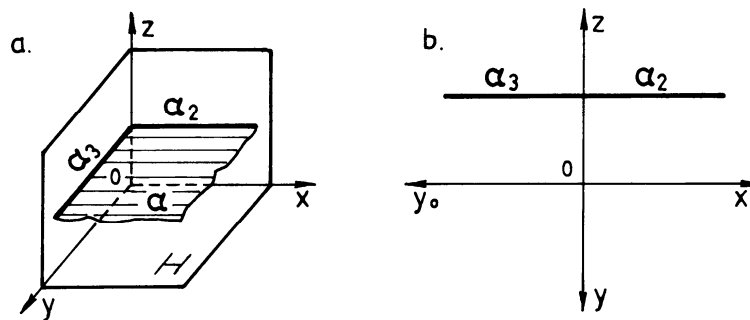
1.5.3. Specijalan položaj ravni

Ravan zauzima specijalan položaj u prostoru, ako zaklapa sa projekcijskim ravnima uglove 0° , 45° ili 90° , odnosno za ravan se kaže da je u specijalnom položaju ako je paralelna sa jednom od projekcijskih ravni ili ako je normalna na jednu od projekcijskih ravni.

1.5.3.1. Ravan paralelna sa projekcijskom ravni

- Ravan paralelna sa horizontalnicom - $\alpha(\infty; \infty; \alpha_z)$

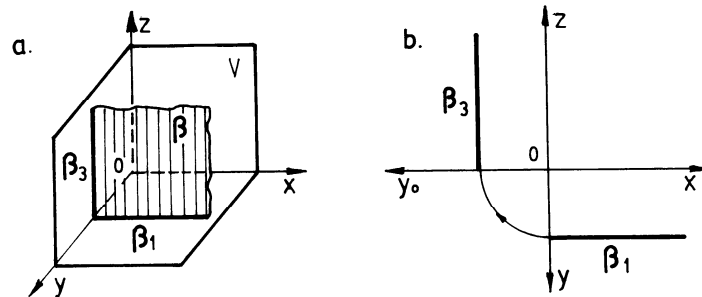
Na sl. 1.63.a. prikazana je ravan $\alpha \parallel H$ u kosoj projekciji gde su tragovi ravni paralelni horizontalnici, a na sl. 1.63.b. ista ravan u ortogonalnoj projekciji (posle obaranja horizontalnice i profilnice). Tragovi ravni α_2 i α_3 paralelni su sa osama x i y , a normalni na z -osu



Sl. 1.63. Tragovi ravni paralelni sa H

- Ravan paralelna sa vertikalnicom - $\beta(\infty; \beta^y; \infty)$

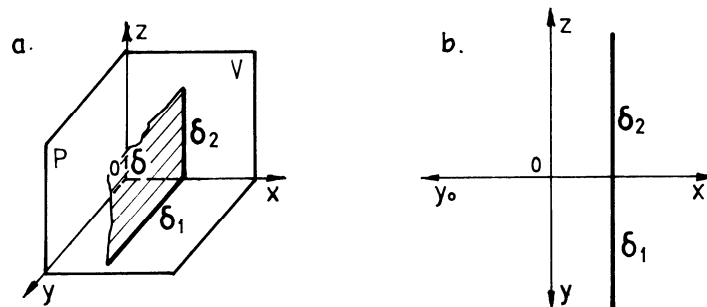
Na *sl. 1.64.a.* prikazana je u kosoj projekciji, ravan β paralelna sa vertikalnicom, a na *sl. 1.64.b.* ista ravan u ortogonalnoj projekciji. Tragovi ove ravni β_1 i β_3 paralelni su osama x i z , a normalni su na y -osu.



Sl. 1.64. Tragovi ravni paralelni sa V

- Ravan paralelna sa profilnicom - $\delta(\delta_x; \infty; \infty)$

Na *sl. 1.65.a.* i *sl. 1.65.b.* u kosoj projekciji (perspektivi) i ortogonalnoj projekciji prikazana je ravan $\delta \parallel P$. Tragovi ove ravni δ_1 i δ_2 paralelni su sa y -osom i z -osom, a normalni su na x -osu.



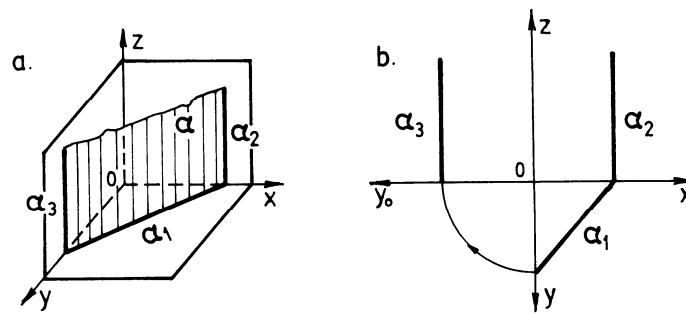
Sl. 1.65. Tragovi ravni paralelni sa P

1.5.3.2. Ravan normalna na projekcijsku ravan

- Ravan normalna na horizontalnicu - $\alpha(\alpha_x; \alpha_y; \infty)$

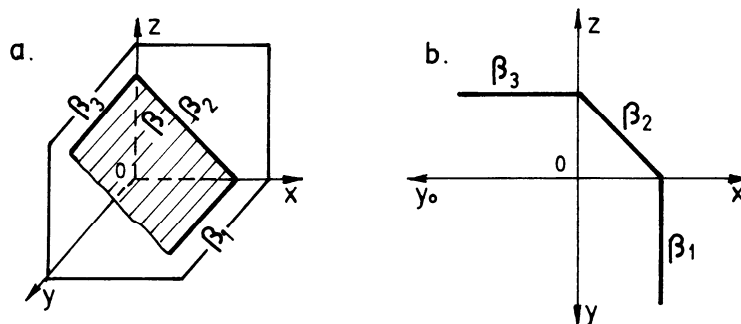
Slika 1.66.a. prikazuje u kosoj projekciji ravan α normalnu na horizontalnicu, a na *sl. 1.66.b.* istu ravan u ortogonalnoj projekciji. Sve tačke ravni α imaju prvu projekciju na prvom tragu ravni. Prvi trag ravni

α_1 stoji pod nekim uglom prema osama x i y . Drugi trag ravni α_2 je normalan na x -osu, a treći trag ravni α_3 je normalan na y -osu.



Sl. 1.66. Tragovi ravni normalni na H

• Ravan normalna na verikalnicu - $\beta(\beta_x; \infty; \beta_z)$

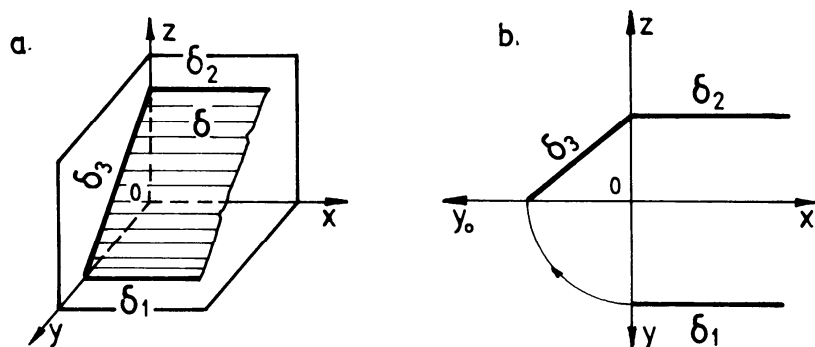


Sl. 1.67. Tragovi ravni normalni na V

Na sl. 1.67.a. i sl. 1.67.b. dat je prikaz prostornog i ortogonalnog projektovanja ravni za slučaj kada je ravan β normalna na vertikalnicu. U ovom slučaju, prvi trag ravni β_1 je normalan na x -osu, drugi trag ravni β_2 je pod nekim uglom prema osama x i z , a treći trag ravni β_3 je upravan na z -osu. Sve tačke ravni β imaju drugu projekciju na drugom tragu ravni.

• Ravan normalna na profilnicu - $\delta(\infty; \delta_y; \delta_z)$

Na sl. 1.68.a. prikazana je u kosoj projekciji ravan δ koja je normalna na ravan profilnice, a na sl. 1.68.b. prikazana je ista ravan u ortogonalnoj projekciji. Prvi trag ravni δ_1 i drugi trag ravni δ_2 su paralelni sa x -osom. Treći trag ravni δ_3 je pod nekim uglom prema osama y i z . Sve tačke ove ravni imaju treću projekciju na trećem tragu ravni δ_3 .



Sl. 1.68. Tragovi ravni normalni na P

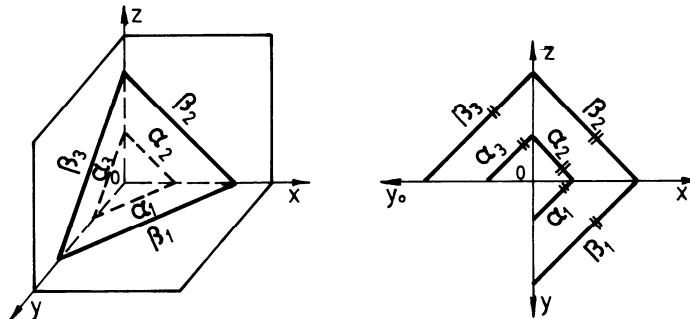
1.5.4. Međusobni položaj dve ravni

Dve ravni u prostoru mogu zauzimati sledeće položaje:

- mogu biti paralelne i
- mogu se seći.

1.5.4.1. Paralelne ravni

Dve ravni α i β su paralelne ako u konačnosti nemaju zajedničkih tačaka, odnosno ako su sve tačke ravni α podjednako udaljene od ravni β , ili dve ravni su paralelne ako su im odgovarajući tragovi ravni međusobno paralelni ($\alpha_1 \parallel \beta_1, \alpha_2 \parallel \beta_2, \alpha_3 \parallel \beta_3$), sl. 1.69.

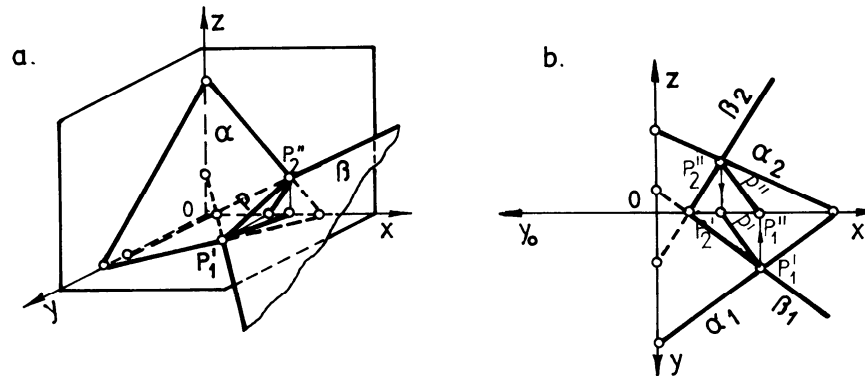


Sl. 1.69. Paralelne ravni

1.5.4.2. Presek dve ravni

Na sl. 1.70.a. su prikazane u preseku dve proizvoljne ravni α i β . Prava po kojoj se seku ravni - presečnica (p) je definisana prodorima P_1' i P_2'' kroz horizontalnicu i vertikalnicu. Prodorne tačke se nalaze u preseku

tragova ravni α i β u odgovarajućim projekcijskim ravnima. Tako, prvi prodor presečnice $P_1 \equiv P_1'$ nastaje presekom tragova ravni α_1 i β_1 u horizontalnici, a drugi prodor presečnice $P_2 \equiv P_2''$ se nalazi u preseku drugih tragova ravni α_2 i β_2 u odgovarajućoj ravni vertikalnice. Treći prodor $P_3 \equiv P_3'''$ se određuje po prethodnoj analogiji. Međutim, zbog ređe upotrebe neće se posebno analizirati.



Sl. 1.170. Presek dve proizvoljne ravni

Postupak određivanja presečnice u ortogonalnoj projekciji dat je na sl. 1.70.b. Na sl. 1.70.b. se vidi da u preseku odgovarajućih tragova ravni, u horizontalnici α_1 i β_1 , a u vertikalnici α_2 i β_2 , su prodori presečnice P_1' i P_2'' . Iz tačaka prodora P_1' i P_2'' ordinatama do preseka sa x-osom određuju se odgovarajući prodori presečnice P_1'' i P_2' . Spajanjem tačaka u odgovarajućim projekcijama definiše se prva i druga projekcija presečnice, tj. p' ($P_1'P_2'$) i p'' ($P_2''P_1''$).

1.5.5. Sutražnice

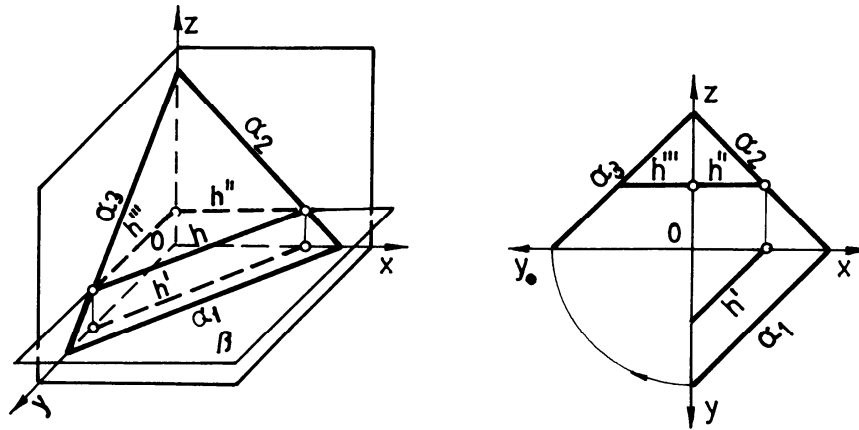
Od bezbroj mogućih položaja između proizvoljne ravni i ravni u specijalnom položaju razmotriće se samo slučaj kada je specijalna ravan paralelna sa horizontalnicom, a normalna na vertikalnicu i profilnicu.

Prava koja nastaje presekom proizvoljne ravni i ravni koja je paralelna nekoj projekcijskoj ravni naziva se sutražnica ili paralela. Analogno mogućim položajima specijalnih ravni u odnosu na projekcijske ravni postoje tri sutražnice i to: prva sutražnica-h, druga sutražnica-v(f) i treća sutražnica-p. Treća sutražnica je retko u upotrebi.

Sutražnice se najčešće, koriste da bi se odredila nepoznata projekcija ma koje tačke koja se nalazi na datoj ravni.

1.5.5.1. Prva sutražnica -h

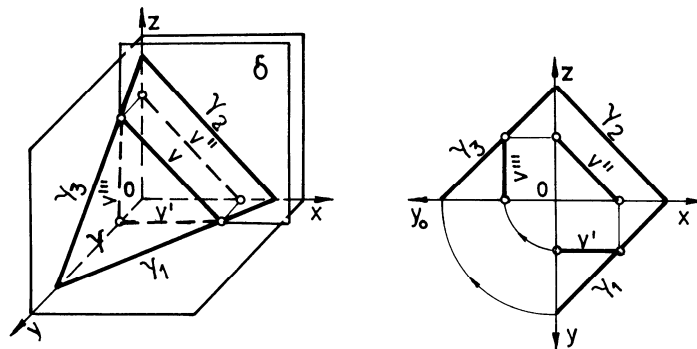
Prva sutražnica je prava koja predstavlja presek proizvoljne ravni α i horizontalne ravni β , Sl. 1.71. Pošto je ravan β paralelna sa horizontalnicom i može biti na bilo kom rastojanju od nje prva sutražnica je svaka prava koja leži u ravni β , a paralelna je sa horizontalnicom. Prva projekcija prve sutražnice h' je zato paralelna sa prvim tragom proizvoljne ravni α_1 . Druga projekcija prve sutražnice h'' paralelna je sa x-osom, a treća projekcija prve sutražnice h''' paralelna je sa y-osom.



Sl. 1.71. Prva sutražnica

1.5.5.2. Druga sutražnica -v(f)

Druga sutražnica je presečnica proizvoljne ravni γ i ravni δ koja je paralelna sa vertikalnicom, sl. 1.72. Druga sutražnica-v je zato prava koja leži u ravni δ , a paralelna je sa vertikalnicom. Analogno sa prethodnim



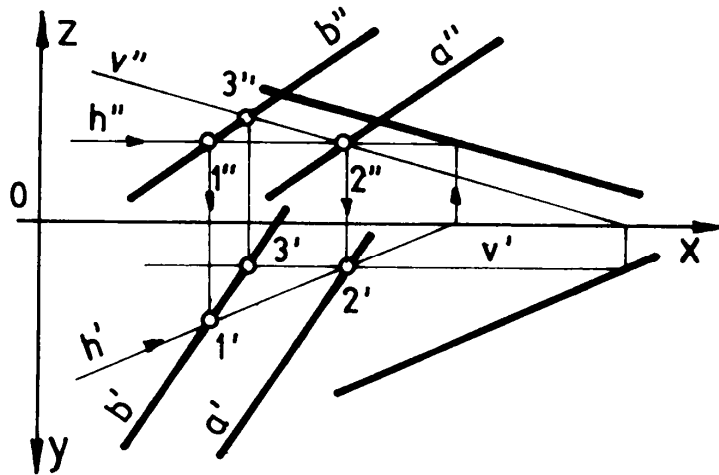
Sl. 1.72. Druga sutražnica

razmatranjem biće prva projekcija druge sutražnice- v' paralelna sa x-osom, njena druga projekcija- v'' paralelna sa vertikalnicom i drugim tragom proizvoljne ravni γ_2 . Treća projekcija druge sutražnice v''' paralelna je sa z-osom.

• Projektovanje ravni pomoću sutražnica

Pored navedenih osobina sutražnica, njihov značaj se ogleda i u predstavljanju ravni bez crtanja tragova te ravni. Pri crtanju tragova ravni sutražnicama, treba podsetiti da su sutražnice paralelne odgovarajućim tragovima ravni pa se na tome i zasniva njihova zamena.

Primer: Nacrtati ravan bez traženja tragova ravni pomoću sutražnice i dve paralelne prave a i b. Položaj paralelnih pravi dat je na *sl. 1.73*.

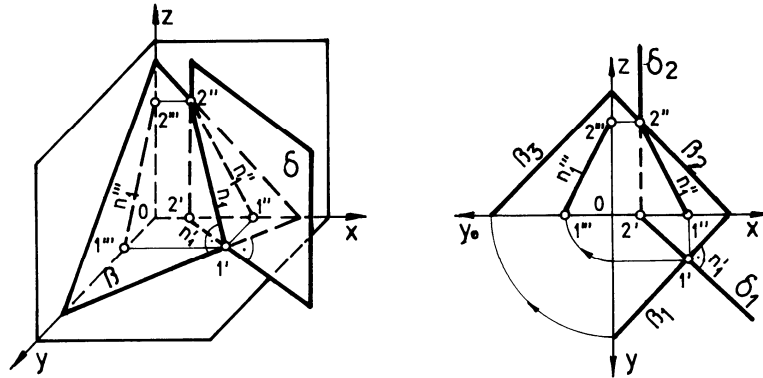


Sl. 1.73. Rešenje primera

1.5.6. Nagibnice

Nagibnica ili linija najvećeg pada nastaje presekom proizvoljne ravni i specijalne ravni koja je normalna na jedan od tragova te proizvoljne ravni. Postoje tri nagibnice jedne ravni: *prva nagibnica* - n_1 (specijalna ravan je normalna na prvi trag proizvoljne ravni), *druga nagibnica* - n_2 (specijalna ravan je normalna na drugi trag proizvoljne ravni) i *treća nagibnica* - n_3 (specijalna ravan normalna na treći trag proizvoljne ravni)

1.5.6.1. Prva nagibnica - n_1



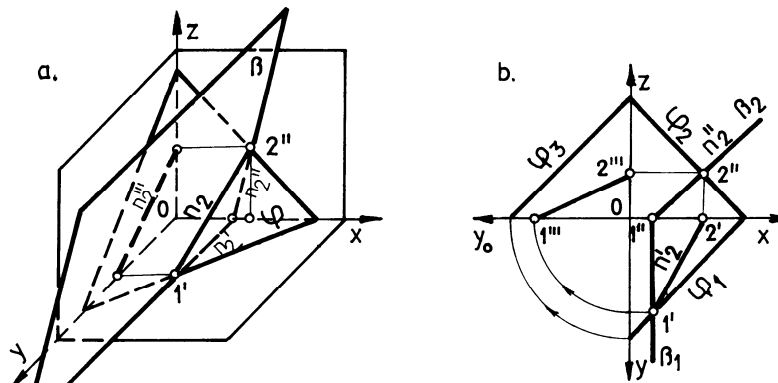
Sl. 1.74. Prva nagibnica

Prva nagibnica - n_1 nastaje presekom proizvoljne ravni β i specijalne ravni δ normalne na prvi trag proizvoljne ravni β_1 , sl. 1.74.

Prva projekcija prve nagibnice n_1' normalna je na prvi trag proizvoljne ravni β_1 i dobija se spajanjem prvih projekcija njenih prodora $1'$ i $2'$. Druga projekcija prve nagibnice - n_1'' se određuje spajanjem drugih projekcija prodora $1''$ i $2''$, a treća projekcija prve nagibnice - n_1''' nalazi se spajanjem trećih projekcija prodora $1'''$ i $2'''$.

1.5.6.2. Druga nagibnica - n_2

Druga nagibnica - n_2 predstavlja presek proizvoljne ravni φ i ravni β normalne na drugi trag proizvoljne ravni φ_2 , sl. 1.75.



Sl. 1.75. Druga nagibnica

Na *sl. 1.75.a.* i *sl. 1.75.b.* se vidi da je druga projekcija druge nagibnice n_2'' normalna na drugi trag proizvoljne ravni φ_2 i dobijena je spajanjem prodora drugih projekcija $1''$ i $2''$. Prva projekcija druge nagibnice n_2' je određena spajanjem projekcija prodora $1'$ i $2'$, a treća projekcija druge nagibnice n_2''' je definisana povezivanjem prodora u trećoj projekciji $1'''$ i $2'''$.

ZADACI: 1.37-1.48.

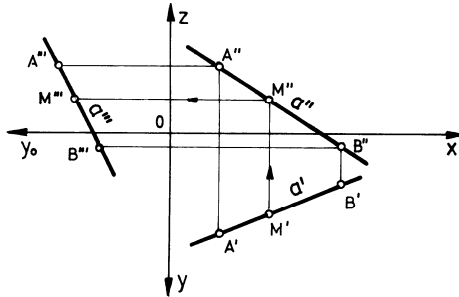
- 1.37. Nacrtati tragove ravni $\alpha(-15;20;10)$ i $\beta(-20;-20;30)$ i odrediti položaj ravni prema projekcijskim ravnima.
- 1.38. Nacrtati drugi i treći trag zadate ravni $\alpha(\infty;\infty;15)$ i odrediti položaj ravni u odnosu na horizontalnicu.
- 1.39. Data je ravan $\gamma(\infty;20;\infty)$ u specijalnom položaju. Nacrtati tragove zadate ravni i odrediti položaj prema horizontalnici i vertikalnici.
- 1.40. Nacrtati tragove ravni $\delta(15;\infty;10)$ i odrediti njen položaj u prostoru.
- 1.41. Ravan ε je definisan osnim tragovima $\varepsilon_x=30$, $\varepsilon_y=30$ i $\varepsilon_z=\infty$. Nacrtati tragove ravni i odrediti gde se projiciraju prve projekcije tačke ravni.
- 1.42. Odrediti prvu projekciju tačke $N(60;?;15)$ ne crtajući tragove ravni φ . Ravan φ je definisana trima tačkama $\varphi[A(10;15;5), B(30;5;30), C(50;25;10)]$.
- 1.43. Nacrtati tragove zadatih ravni α i β u sve tri projekcije, a zatim ispitati međusobni položaj datih ravni. $\alpha(20;\infty;14)$, $\beta(30;\infty;20)$.
- 1.44. Drugom tragu ravni $\alpha(30;-20;\infty)$ paralelna je ravan $\beta(10;?;?)$. odrediti tragove ravni β i položaj obe ravni u odnosu na horizontalnicu.
- 1.45. Na osnovu nacrtanih tragova ravni $\alpha(40;25;30)$ i $\beta(-30;15;10)$ odrediti međusobni položaj zadatih ravni.
- 1.46. Data je ravan $\lambda(70;50;40)$ i na njoj tačka $A(20;15;?)$. Odrediti obe projekcije tačke A, a zatim kroz tačku A provući prvu nagibnicu.

- 1.47. U zadatoj ravni $\beta(45;25;20)$ leži tačka B. Odrediti položaj tačke B koja leži istovremeno i u horizontalnici 20mm desno od profilnice.
- 1.48. Nacrtati sva tri traga zadate ravni $\beta(40;25;30)$ i sve tri projekcije date tačke B(10;10;15). Pomoću prve sutražnice proveriti da li tačka B leži u ravni β .

1.6. MEĐUSOBNI POLOŽAJ TAČKE, PRAVE I RAVNI

1.6.1. Tačka i prava

• Tačka na pravoj

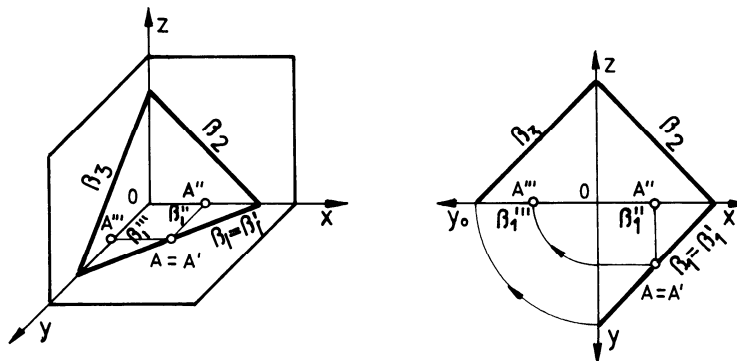


Sl. 1.76. Projekcija tačke na pravoj

Tačka koja se nalazi na nekoj pravoj i njene projekcije prikazuju se na odgovarajućim projekcijama prave. Tako, položaj date tačke M na datoj pravoj a , sl. 1.76. u odnosu na tačke A i B koje određuju pravu a , je isti kao i u projekcijama, tj. kada je $AM:MB = m:n$, i u projekcijama će biti: $A'M':M'B' = A''M'':M''B'' = A'''M''':M'''B''' = m:n$. Nepoznata projekcija M'' tačke M , određuje se povlačenjem ordinate, iz prve projekcije M' normalno na x -osu do preseka sa drugom projekcijom a'' prave a .

1.6.2. Tačka i ravan

• Tačka na tragu ravni

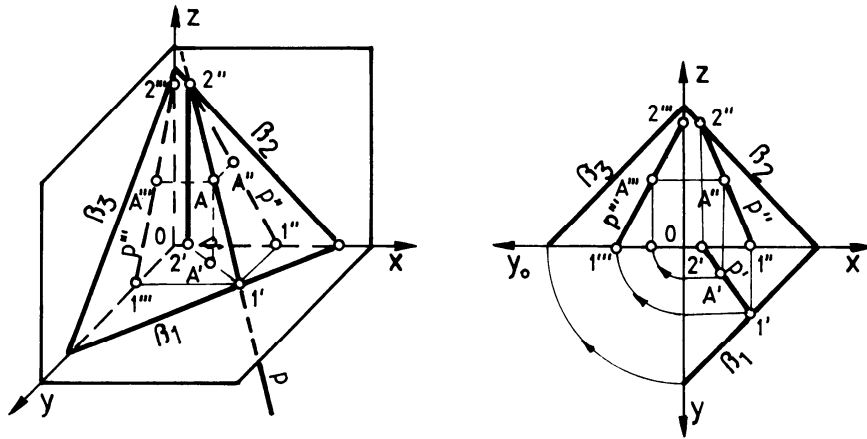


Sl. 1.77. Tačka na tragu ravni

Na osnovu ranijeg zaključka da presek ravni sa odgovarajućom projekcijskom ravni predstavlja trag te ravni, kao i da tragovi ravni β_1 , β_2 i β_3 , *sl. 1.77*, leže na odgovarajućim projekcijskim ravnima H, V i P, može se zapaziti da i tačka A koja se nalazi na tragu ravni leži u odgovarajućoj projekcijskoj ravni.

Uzimajući za primer da tačka A leži na prvom tragu ravni β_1 , *sl. 1.77*. i da prva projekcija prvog traga ravni β_1' leži na prvom tragu iste ravni ($\beta_1 = \beta_1'$), odnosno da je druga projekcija prvog traga β_1'' na x-osi, a treća projekcija istog traga β_1''' na y-osi može se videti da je: prva projekcija A' u samoj tački A ($A = A'$); druga projekcija tačke A'' na drugoj projekciji prvog traga ravni β_1'' i poklapa se sa pravcem x-ose; treća projekcija A''' na trećoj projekciji prvog traga ravni β_1''' i padati na pravac y-ose. Istim postupkom definiše se položaj bilo koje tačke koja leži na drugom, odnosno trećem tragu ravni.

• Tačka na ravni



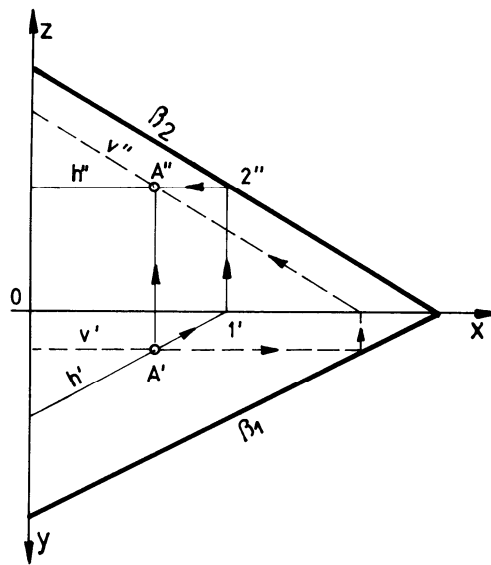
Sl. 1.78. Tačka na ravni

Pri određivanju položaja tačke A na proizvoljnoj ravni β , *sl. 1.78*, postavlja se pomoćna prava p, tako da prava leži u ravni β i prolazi kroz tačku A. S obzirom da proizvoljna prava p leži u ravni β , prvi prodor prave 1', ležaće na prvom tragu ravni β_1 , a drugi prodor prave 2'' je na drugom tragu ravni β_2 . Sa konstatacijom da proizvoljna prava p leži u datoj ravni i da data tačka A leži u proizvoljnoj pravi p, kao i utvrđenim načinom projektovanja tačke u ortogonalnoj projekciji, *sl. 1.78.b*. određuje se položaj tačke A u ravni β .

• **Određivanje položaja tačke na ravni**

Najpreciznije određivanje položaja tačke na proizvoljnoj ravni vrši se pomoću sutražnica. Da bi tačka A ležala na proizvoljnoj ravni prva i druga projekcija tačke mora ležati na prvoj odnosno drugoj sutražnici (A' u h' i A'' u h'' , ili A' u v' i A'' u v''). Iz ovoga proizilazi da je za određivanje položaja tačke u proizvoljnoj ravni dovoljno znati jednu njenu projekciju, dok se druga projekcija određuje pomoću jedne od sutražnica.

Primer: Data je ravan $\beta(50;25;30)$ i na njoj tačka $A(15;5;?)$, *sl. 1.79*. Prvom sutražnicom h odrediti drugu projekciju A'' tačke A , a drugom sutražnicom v proveriti tačnost konstrukcije.



Sl. 1.79. Određivanje položaja tačke na ravni

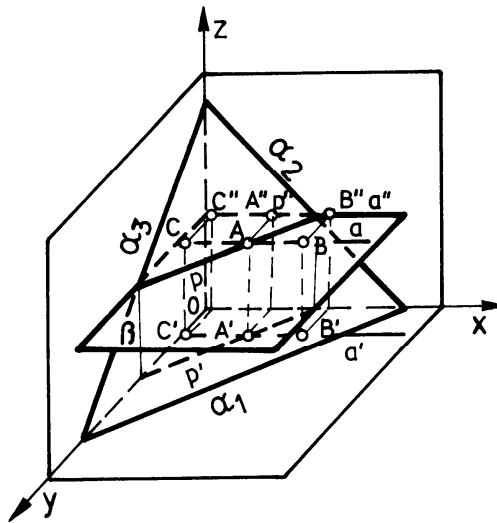
Druga projekcija A'' tačke A dobija se tako što se na ucrtane tragove ravni β_1 i β_2 , povuče prva projekcija prve sutražnice h' kroz prvu projekciju A' tačke A , paralelno prvom tragu ravni β_1 do x -ose, tačka $1'$. Zatim ordinatom iz $1'$ do tačke $2''$ - drugi trag prve sutražnice, *sl. 1.79*. Iz $2''$, paralelno x -osi povučena je druga projekcija prve sutražnice h'' , a iz A' , projekcijskim zrakom, normalno na x -osu do preseka sa drugom projekcijom h'' . U preseku je druga projekcija A'' tačke A . Nepoznata projekcija se može odrediti i pomoću druge sutražnice - postupak je prikazan na istoj slici isprekidanim linijama.

• Tačka van ravni

Na *sl. 1.80*, pomoću proizvoljne ravni α , koja ima proizvoljan položaj i ravni u specijalnom položaju β (ravan β je paralelna sa horizontalnicom), prikazani su mogući položaji tačke prema proizvoljnoj ravni α .

Tri su moguća položaja tačke prema ravni:

- tačka je na ravni (ovaj položaj smo već razmatrali u prethodnoj tački),
- tačka je iznad ravni i
- tačka se nalazi ispod ravni.



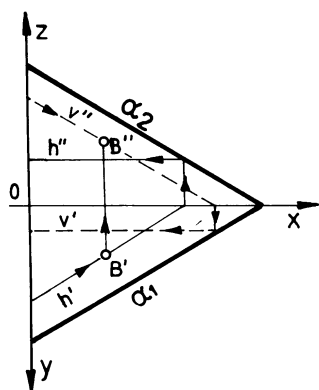
Sl. 1.80. Tačka van ravni

• Tačka iznad ravni

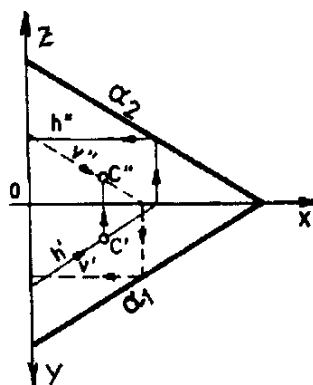
Tačka B je iznad ravni α ako je ispunjen uslov da druga projekcija tačke B'' leži na drugoj projekciji druge sutražnice (B'' u v''), a prva projekcija tačke B' se nalazi između prve projekcije druge sutražnice v' i prvog traga ravni α_1 , odnosno ako prva projekcija tačke B' leži u prvoj projekciji prve sutražnice (B' u h'), a druga projekcija tačke B'' je iznad druge projekcije prve sutražnice h'', *sl. 1.81*.

• Tačka ispod ravni

Uslov da tačka C leži ispod ravni α , *sl. 1.82*, je da njena druga projekcija C'' leži na drugoj projekciji druge sutražnice v'' (C'' u v''), a prva



Sl. 1.81. Tačka iznad ravni



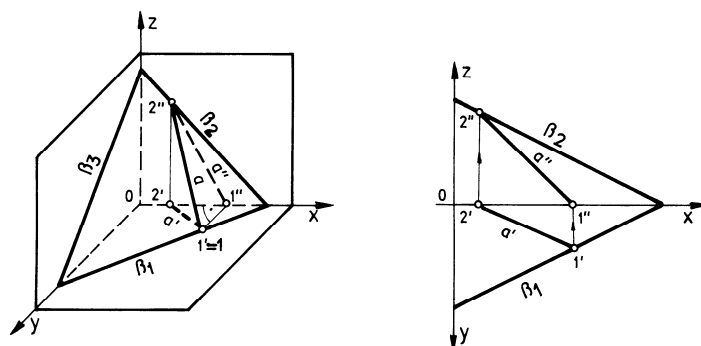
Sl. 1.82. Tačka ispod ravni

projekcija C' bude između prve projekcije druge sutražnice v' i x-ose, ili da prva projekcija C' leži na prvoj projekciji prve sutražnice h' (C' u h'), a druga projekcija C'' bude ispod druge projekcije sutražnice h'' .

1.6.3. Prava i ravan

• Prava u ravni

Prava a će ležati u proizvoljnoj ravni β , ako je prvi trag te prave ($1 \equiv 1'$) na prvom tragu ravni β_1 , a drugi trag prave ($2 \equiv 2''$) na drugom tragu ravni β_2 . Postupak dokaza je sledeći: U preseku prve projekcije a' prave a i prvog traga ravni β_1 je prvi trag prave - tačka $1'$, sl. 1.83. U tački $1'$ je ujedno i prva projekcija prvog traga prave ($1 \equiv 1'$). Iz $1'$ je podignuta ordinata do x-ose. U preseku ordinate i x-ose nalazi se druga projekcija prvog traga prave $1''$. Takođe, u preseku prve projekcije prave a' i x-ose nalazi se prva projekcija drugog traga prave $2'$.



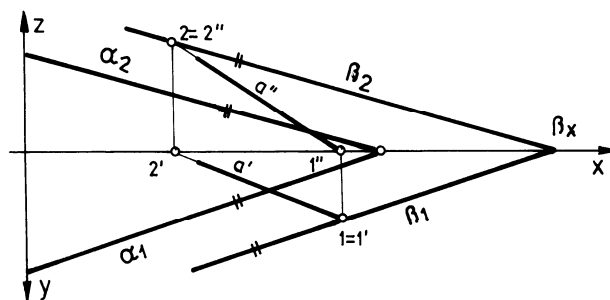
Sl. 1.83. Prava u ravni

Ordinata podignuta iz $2'$ do preseka sa drugim tragom ravni definiše drugu projekciju drugog traga prave, tačka $2''$, odnosno drugi trag prave u vertikalnici ($2 \equiv 2''$). Spajanjem tragova prave $1''$ sa $2''$ dobija se druga projekcija prave a'' .

Za određivanje položaja prave na datoj ravni treba da se zna jedna projekcija prave (prva ili druga) i na osnovu prethodnih saznanja i analogije prikazanog postupka određuje se nepoznata projekcija.

• Prava paralelna sa proizvoljnom ravni

Prava je paralelna sa proizvoljnom ravni ako je ispunjen uslov da prava leži u nekoj drugoj ravni koja je paralelna sa datom proizvoljnom ravni; ili da tragovi prave (prvi i drugi) leže na odgovarajućim tragovima pomoćne ravni paralelne proizvoljnoj ravni.



Sl. 1.84. Prava paralelna sa ravni

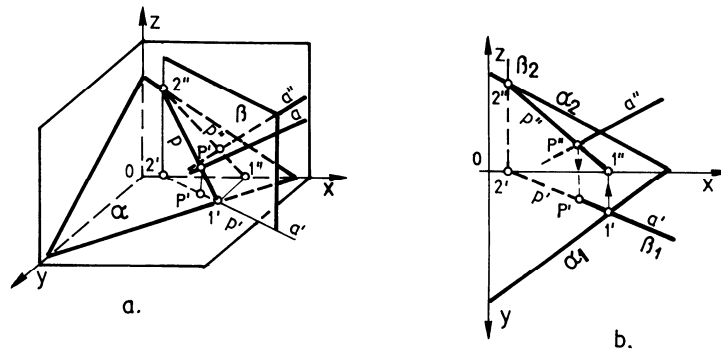
Da bi se ustanovila paralelnost prave a sa datom ravni α , sl. 1.84. treba prvo odrediti tragove prave a (tačke $1'$ i $2''$) a , zatim kroz njih povući tragove pomoćne ravni β , paralelno sa tragovima ravni $\alpha_1 \parallel \beta_1$ i $\alpha_2 \parallel \beta_2$.

Redosled rešavanja sličnih zadataka je sledeći: Najpre se odrede tragovi prave a (tačke $1'$ i $2''$), po postupku koji je ranije objašnjen, a zatim kroz trag prave $2''$ se povuče paralela sa drugim tragom proizvoljne ravni α_2 do preseka sa x -osom, odnosno osnog prodora β_x . Potom, iz osnog prodora β_x povuče se paralela sa prvim tragom proizvoljne ravni α_1 . Ukoliko se prvi trag prave $1'$ nađe na ovoj paraleli biće to potvrda da je pomoćna ravan β paralelna sa proizvoljnom ravni α , odnosno prava a leži na ravan β .

• Prodor prave kroz ravan

Na sl. 1.85. prikazan je postupak za određivanje prodora prave a kroz ravan α . Za određivanje prodora prave kroz proizvoljnu ravan, treba kroz

zadatu pravu postaviti pomoćnu ravan. Pomoćna ravan β , u kojoj leži prava a , postavlja se normalno ili na horizontalnicu ili vertikalnicu.



Sl. 1.85. Prodor prave kroz ravan

Ravan α i β seku se po presečnici p , a prava a koja leži u pomoćnoj ravni β seče presečnicu p u tački prodora P . Da prava a leži na pomoćnoj ravni β može se dokazati i povlačenjem prve ili druge sutražnice kroz tačke koje definišu datu pravu a .

U ortogonalnoj projekciji, sl. 1.85.b. prikazan je postupak određivanja presečnice p ravni α i β , odnosno njene projekcije p' i p'' . U preseku date prave a i presečnice p dobija se prodor P , odnosno prva i druga projekcija prodora P' i P'' . Prva projekcija prave a' i prva projekcija presečnice p' poklapaju se sa prvim tragom pomoćne ravni β_1 . Druga projekcija presečnice p'' je spojnica tačaka $1''$ i $2''$. Prva projekcija prodora P' nalazi se na prvoj projekciji presečnice p' , a određuje se pomoću projekcijskog zraka povučenog iz druge projekcije prodora P'' do preseka sa prvom projekcijom presečnice p' .

ZADACI: 1.49 - 1.60.

- 1.49. Ispitati međusobni položaj tačaka $A(15;16;9)$, $B(10;25;15)$ i $C(25;5;5)$ i ravni $\alpha(60;35;30)$.
- 1.50. Ravan ε je određena pravama $a[A(20;5;20), C(30;12;8)]$ i $b[B(40;4;15), C(30;12;8)]$. Odrediti međusobni položaj tačke $K(10;15;20)$ i ravni ε .
- 1.51. Prva projekcija tačke A' leži na prvoj projekciji drugog traga α_2 ravni α , 25mm desno od koordinatnog početka O . Odrediti položaj tačke A , ako je $\alpha(55;20;30)$.

- 1.52. Tačka $A(15;?;15)$ leži u ravni $\alpha(50;25;30)$. Nacrtati prvu i drugu projekciju tačke A koristeći drugu sutražnicu.
- 1.53. Na ravan $\beta(70;30;40)$ leži tačka $A(15;?;25)$ i $B(30;15;?)$. Kroz tačke A i B povući pravu p koja će ležati u zadatoj ravni, a zatim odrediti projekcije tragova prave p.
- 1.54. Nacrtati prvi i drugi trag ravni δ pomoću prava a i b koje se seku u tački $C(35;10;10)$. Prava a prolazi kroz tačku $A(15;5;40)$, a prava b kroz tačku $B(50;5;15)$.
- 1.55. Prava a, definisana tačkama $A(25;5;8)$ i $B(60;20;15)$, prodire kroz ravan $\alpha(80;35;40)$. Odrediti prodor prave a kroz ravan α .
- 1.56. Prava p prolazi kroz tačke $A(25;5;10)$ i $B(55;20;20)$ i prodire ravan $\beta(70;25;\infty)$. Odrediti tačku prodora prave p kroz ravan β .
- 1.57. Presek ravni $\alpha(85;?;?)$ i $\beta(-20;?;?)$ je prava $p[A(10;0;25), B(50;10;5)]$. Nacrtati tragove ravni α i β .
- 1.58. Odrediti presek ravni $\gamma(85;30;40)$ i $\delta(30;-25;?)$ pod uslovom da drugi tragovi ravni budu paralelni ($\gamma_2 \parallel \delta_2$).
- 1.59. Nacrtati preseke ravni $\lambda(15;-5;-10)$ i $\tau(\infty;15;20)$.
- 1.60. Odrediti prodor prave m i ravni ABC. Prava m je definisana tačkama $M(10;40;60)$ i $N(50;5;5)$, a ravan tačkama $A(20;5;40)$, $B(60;10;25)$ i $C(25;40;10)$.

Pri određivanju tragova prave, ma u kojoj projekcijskoj ravni, treba produžiti projekciju prave u susednoj ravni do preseka sa odgovarajućom osom, a zatim iz dobijene tačke povući sponu - (normalu) do preseka odgovarajućom projekcijom. Dobijena tačka biće trag prave kroz odgovarajuću projekcijsku ravan.

Tako su, na *sl. 1.57.* najpre nacrtane sve tri projekcije date prave **a**. Zatim se produženjem prve projekcije prave **a'** do x-ose dobija tačka preseka P_2' . Tačka P_2' predstavlja prvu projekciju drugog traga prave. Podizanjem normale iz prve projekcije drugog traga prave, iz tačke P_2' do preseka sa drugom projekcijom prave **a''** dobija se drugi trag prave P_2 (tačka prodora u vertikalnici). Drugi trag prave poklapa se sa drugom projekcijom drugog traga prave ($P_2 \equiv P_2''$). Pošto je drugi trag prave u vertikalnici, njena prva projekcija P_2' mora biti na x-osi, a treća projekcija P_2''' na z-osi. Ili, treća projekcija drugog traga, P_2''' se određuje na osnovu prve i druge projekcije drugog traga prave, tačke P_2' i P_2'' , po postulatima određivanja treće projekcije tačke kada su poznate prva i druga projekcija tačke.

Sličnim postupkom, produženjem druge projekcije prave **a''** do preseka sa x-osom određuje se druga projekcija prvog traga prave, tj. tačka P_1'' . Iz tačke P_1'' , normalno na x-osu, i sponom do preseka sa prvom projekcijom prave **a'** do presečne tačke P_1' . Tačka P_1' je prodor kroz horizontalnicu, odnosno prvi trag prave - P_1 , gde je istovremeno i prva projekcija prvog traga prave ($P_1 \equiv P_1'$). Na osnovu zapažanja, sa *sl. 1.55.*, da prvi trag prave leži u horizontalnici može se zaključiti da druga projekcija prvog traga prave P_1'' mora biti na x-osi, a treća projekcija prvog traga prave P_1''' na y-osi. Treća projekcija prvog traga prave P_1''' dobija se postupkom crtanja treće projekcije kada su poznate dve projekcije P_1' i P_1'' .

Treći trag prave P_3 , tačka leži u profilnici, određen je na osnovu prethodnih objašnjenja. Naime, poznato je da prva projekcija trećeg traga prave P_3' mora biti na y-osi, a druga projekcija trećeg traga P_3'' na z-osi. Ili, položaj prve projekcije trećeg traga prave P_3' i druge projekcije trećeg traga prave P_3'' dobija se u preseku prve projekcije prave **a'** sa y-osom, odnosno u preseku druge projekcije prave **a''** sa z-osom. Treća projekcija trećeg traga prave P_3''' koja se poklapa sa trećim tragom prave ($P_3 \equiv P_3'''$) dobija se postupkom crtanja treće projekcije na osnovu prve i druge projekcije.

◦ **Određivanje pripadnosti prave**

Pripadnost, položaj prave u prostoru, odnosno njen prolaz kroz oktante, se određuje pomoću prve projekcije a' i druge projekcije a'' date prave a u odnosu na x -osu. S desna u levo, *sl. 1.57*. prati se položaj prve i druge projekcije a' i a'' date prave a i na osnovu položaja u odnosu na x -osu, kao kod određivanja položaja tačke u prethodnom poglavlju, određuje se pripadnost tačke, odnosno date prave.

◦ **Određivanje vidljivosti projekcija prave**

Nakon određivanja položaja prave u prostoru i pripadnost oktantu, određuje se vidljivost projekcija. Za određivanje vidljivosti projekcije prave koriste se dva načina:

I način: Prema vidljivosti oktanata

Prva projekcija prave a' je vidljiva iznad horizontalnice, tj. vidljivi su oktanti iznad horizontalnice (I,II,V,VI), a nevidljivi su ispod horizontalnice (III,IV,VII,VIII).

Druga projekcija prave a'' vidljiva je ispred vertikalnice, odnosno vidljivi su oktanti (I, IV, V, VIII), a nevidljivi su oktanti iza vertikalnice (II,III,VI,VII).

Treća projekcija prave a''' je vidljiva ispred profilnice, gledano s desne strane oktaedra, ili vidljivi su oktanti ispred profilnice (I,II,III,IV), a nevidljivi su iza profilnice (V,VI,VII,VIII).

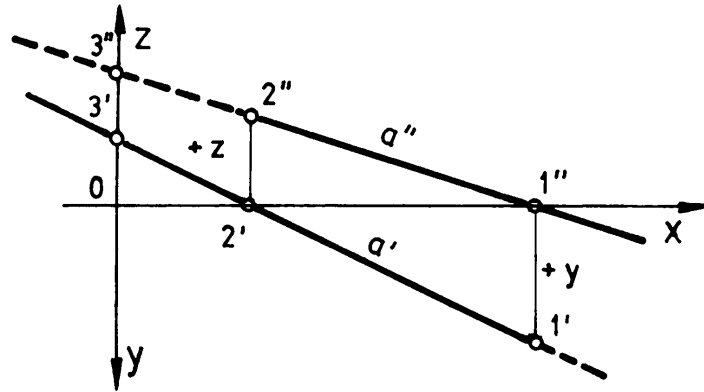
Tragovi prave P_1 , P_2 i P_3 su granice vidljivog i nevidljivog. Nevidljivi deo prave i njene projekcije obeležavaju se isprekidanim linijama, a vidljivi deo punim linijama.

II način: Prema projekcijskim osama

Vidljivost projekcije prave može se odrediti i bez određivanja oktanata kroz koje prava prolazi. Vidljiv deo prave iznad horizontalnice, ili vidljiv deo prve projekcije se očitava pomoću druge projekcije prave, *sl. 1.58*.

Tako, deo druge projekcije iznad horizontalnice, sve što ima pozitivno z , predstavlja vidljiv deo prve projekcije.

Za određivanje vidljivosti druge projekcije koristi se položaj prve projekcije prave u odnosu na y-osu: Druga projekcija je vidljiva za sve pozitivne vrednosti y-ose u prvoj projekciji.



Sl. 1.58. Određivanje vidljivosti prave pomoću projekcijskih osa

ZADACI: 1.25 - 1.36.

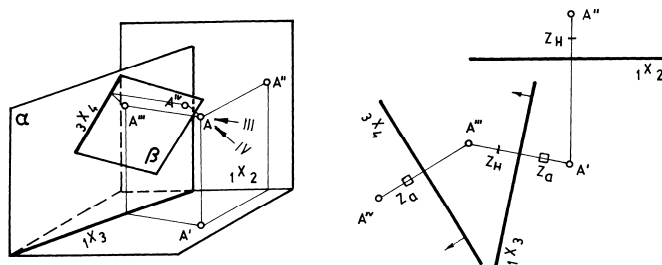
- 1.25. Položaj prave a , u prostoru, određen je tačkama $A(10;25;20)$ i $B(25;10;5)$. Nacrtati prvu, drugu i treću projekciju prave a .
- 1.26. Nacrtati sve tri projekcije prave a definisane tačkama $A(20;-10;25)$ i $B(-10;20;5)$ i odrediti pripadnost zadatih tačaka.
- 1.27. Odrediti projekcije prave $a[A(10;10;15), B(25;20;?)]$ pod uslovom da je prava a paralelna sa horizontalnicom.
- 1.28. Prava a , sa karakterističnim tačkama A i B , leži na y -osi. Nacrtati sve projekcije prave a . $a[A(?;10;?), B(?;25;?)]$.
- 1.29. Prava a prolazi kroz tačku $A(10;10;5)$, paralelna je sa vertikalnicom, a sa horizontalnicom zaklapa ugao od 30° prema pozitivnom delu x -ose. Nacrtati sve tri projekcije prave a .
- 1.30. Ispitati međusobni položaj prave a i b . Prave a i b su prostorno određene tačkama. $a[A(10;15;10), B(35;5;30)]$, $b[C(30;17;10), D(10;0;35)]$.
- 1.31. Položaj prave a je definisan u prostoru tačkama A i B . Nacrtati sve tri projekcije prave b koja je paralelna sa pravom a i prolazi kroz tačku C . $A(15;15;10)$, $B(30;25;30)$, $C(20;10;25)$.
- 1.32. Nacrtati sve tri projekcije prave a , koja prolazi kroz tačku $A(10;5;15)$, paralelna je sa horizontalnicom, a sa vertikalnicom zaklapa ugao od 60° prema pozitivnom delu x -ose.

- 1.33. Kroz tačku $A(20;15;5)$ postaviti pravu a koja je normalna na ravan horizontalnice, a kroz tačku $B(-20;10;20)$ postaviti pravu b koja je normalna na ravan profilnice.
- 1.34. Ispitati međusobni položaj prave a i b , ako su prostorno definisane: $a[A(30;15;20), B(30;25;10)]$ i $b[C(10;35;25), D(10;15;10)]$.
- 1.35. Prava a je definisana, u prostoru, tačkama $A(40;15;15)$ i $B(25;5;27)$. Nacrtati sve tri projekcije prave a , sva tri traga (prodora) prave, a kroz projekcijske ravni i odrediti vidljivost projekcija.
- 1.36. Položaj prave a u prostoru je definisan tačkama A i B . Odrediti tragove prave a kroz projekcijske ravni, pripadnost i vidljivost u projekcijama. $A(10;15;-30)$, $B(-20;-5;-10)$.

1.7. TRANSFORMACIJA

Transformacija je "uvođenje novih projekcijskih ravni i određivanje novih projekcija". Kada osnovne projekcijske ravni nisu dovoljne da daju potpun izgled nekog složenog predmeta, uvode se nove projekcijske ravni i na određen način postavljaju u odnosu na predmet. Nove projekcijske ravni- transformacijske ravni omogućuju potpunu vidljivost složenog predmeta. Postupak transformacije objašnjen je na primeru tačke.

1.7.1. Transformacija tačke



Sl. 1.86. Transformacija tačke

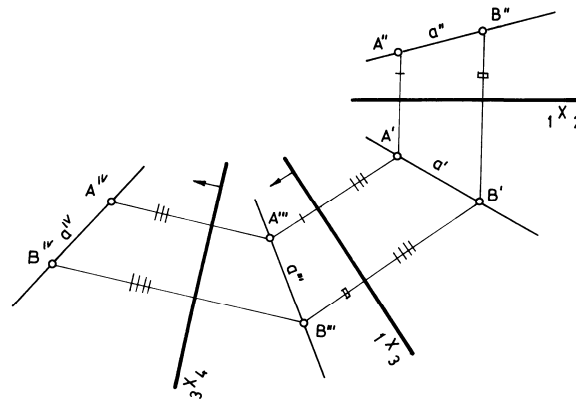
Na sl. 1.86. prikazno je projiciranje tačke A na horizontalnicu, vertikalnicu i na novo postavljene ravni α i β . Ravan α , treća projekcijska ravan ili prva ravan transformacije, je normalna na horizontalnicu dok sa vertikalnicom zaklapa neki ugao. Ravan β , četvrta projekcijska ravan ili druga ravan transformacije, je normalna na ravan α , a sa horizontalnicom, prvom projekcijskom ravni, zaklapa neki ugao. Presek između prve projekcijske ravni i ravni α označen je sa $1x_3$, a presečnica između ravni α i β obeležena je sa $3x_4$.

Treća projekcija A''' dobijena je normalnim projiciranjem tačke A na ravan α i nalazi se na ordinati $A'-A'''$ normalnoj na presečnicu $1x_3$. Odnos između prve projekcije A' i treće projekcije A''' tačke A je isti kao između prve i druge projekcije te tačke. Naime, kako se prva projekcija A' i treća projekcija A''' nalaze na ordinati normalnoj na osu $1x_3$ to se odstojanje tačke A od horizontalnice vidi u trećoj projekciji i prenosi se iz druge, tj. odstojanje A''' od $1x_3$ jednako je odstojanju A'' od $1x_2$.

Četvrta projekcija tačke A^{IV} na ravan β dobijena je normalnim projiciranjem tačke A na četvrtu projekcijsku ravan β i nalazi se na ordinati $A'''-A^{IV}$ upravnoj na presečnicu ${}_3x_4$. Odstojanje četvrte projekcije A^{IV} od ose ${}_3x_4$, odnosno od ravni α , je isto kao i odstojanje prve projekcije A' od ose ${}_1x_3$. Strelice pokazuju iz kog pravca se gleda na projekcijsku ravan.

Na osnovu prednjeg objašnjenja i *sl. 1.86.* dolazi se do vrlo važnog pravila transformacije: *Rastojanje nove projekcije od nove ose jednako je odstojanju prethodne projekcije od prethodne ose.*

1.7.2. Transformacija prave

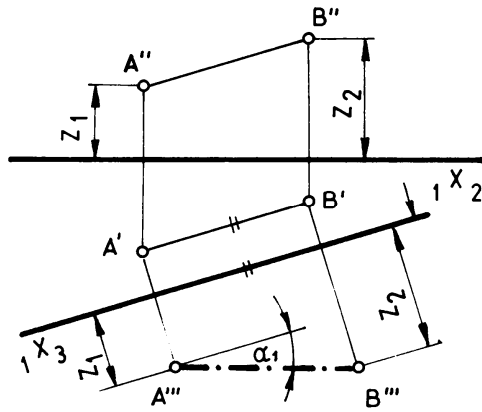


Sl. 1.87. Transformacija prave

Prava a je određena sa dve tačke A i B . Treća i četvrta projekcija prave, odnosno prva i druga transformacija prave a''' i a^{IV} , dobijena je projiciranjem i spajanjem njenih karakterističnih tačaka $A'''-B'''$ i $A^{IV}-B^{IV}$; kako je prikazano na *sl. 1.87.*

• Prava veličina duži

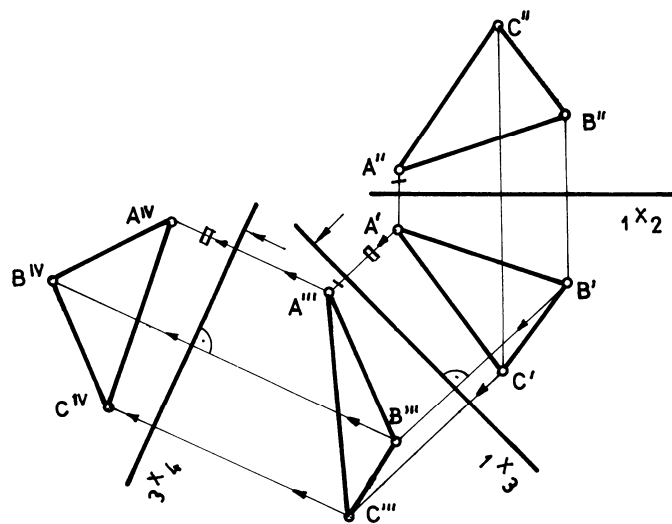
Ranije je rečeno da se postupak transformacije koristi, vrlo često, i za određivanje pravih veličina duži. Postupak konstruisanja prave veličine duži je dat na *sl. 1.88.* Ravan transformacije (${}_1x_3$) postavlja se u položaj paralelno sa duž AB i normalno na horizontalnicu (u projekcijama je $A'B' \parallel {}_1x_3$). Ovim postupkom je prva ravan transformacije dovedena u ortogonalni položaj u odnosu na horizontalnicu. Ove dve ravni (prva ravan transformacije i horizontalnica) dovedene su u položaj prve i druge projekcijske ravni, odnosno prve i druge projekcije.



Sl. 1.88. Određivanje prave veličine duži

Treća projekcija $A'''B'''$ prikazuje pravu veličinu duži AB , a ugao između duži $A'''B'''$ i ose $1x_3$ predstavlja pravu veličinu ugla između prave i horizontalnice.

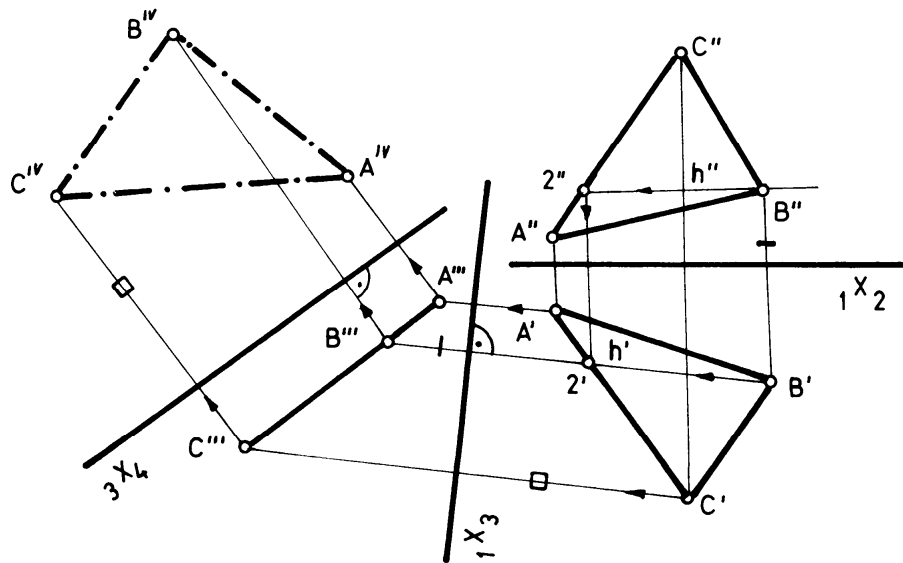
1.7.3. Transformacija slike



Sl. 1.89. Transformacija slike

Transformacijom svih karakterističnih tačaka zadate slike dobija se transformacija slike. Kao što se vidi na *sl. 1.89.* izvršena je dvostruka transformacija trougla ABC : obrtanjem prve transformacijske ravni α oko traga-ose $1x_3$, a zatim druge transformacijske ravni β oko ose $3x_4$.

• **Određivanje prave veličine trougla**



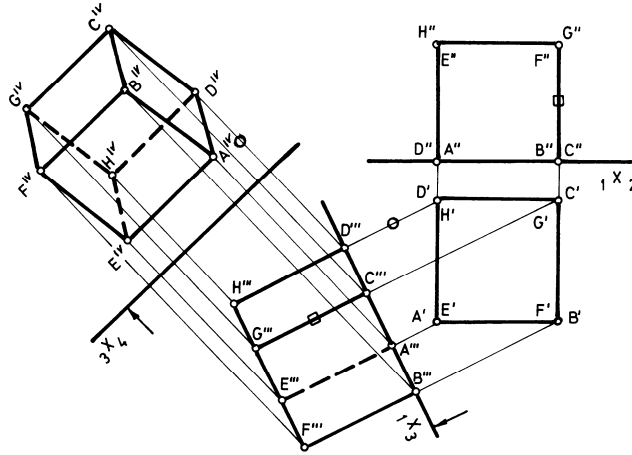
Sl. 1.90. Određivanje prave veličine trougla

Na sl. 1.90. prikazan je postupak dobijanja prave veličine trougla ABC pomoću transformacije. Konstruiše se horizontala h - prva sutražnica, ravni trougla ABC kroz tačku B. U preseku prve sutražnice sa stranicom AC dobija se tačka 2, odnosno u projekcijama tačke 2' i 2''. Normalno na pravac prve projekcije prve sutražnice h' , postavlja se treća projekcijska ravan ($1x_3$). Treća ravan je normalna i na ravan slike. U novoj projekcijskoj ravni dobija se nova projekcija trougla u vidu duži $A''B''C''$, jer je nova ravan normalna na ravan trougla. Postavljanjem četvrte projekcijske ravni ($3x_4$) paralelno sa trećom projekcijom trougla, dobija se četvrta projekcija trougla $A''''B''''C''''$. Trougao u četvrtoj projekciji (nacrtno: crta-tačka-crta) predstavlja pravu veličinu trougla.

1.7.1. Transformacija tela

Postupak transformacije kocke čije su ivice paralelne sa osom $1x_2$ predstavljen je na sl. 1.91. Dvostrukom transformacijom, iz prve projekcijske ravni u treću posebnu ($1x_3$), a iz treće u četvrtu posebnu ravan ($3x_4$) konstruisana je projekcija kocke, tako da se iz četvrte projekcije može lako videti oblik kocke.

Projekcije ivica kocke dobijaju se tako što se najpre vrši projiciranje temena na treću projekcijsku ravan normalnu na horizontalnicu, a zatim na četvrtu. Veliki problem, kod transformacije tela, predstavlja određivanje vidljivosti tačaka i ivica. Za lakše i tačnije rešavanje ovog problema, potrebno je pridržavati se sledećih uputstava:



Sl. 1.91. Transformacija tela

- svaka tačka koja se nalazi na ivici date projekcije, a na koju prvo padne projekcijski zrak mora biti za tu projekciju vidljiva,
- vidljive ivice obrazuju vidljivu ravan i obratno,
- iz vidljive tačke polaze vidljive ivice,
- nevidljiva tačka će biti ona tačka koja se nalazi na ivici tela i najbliža je projekcijskoj ravni i
- iz nevidljive tačke polaze samo nevidljive ivice.

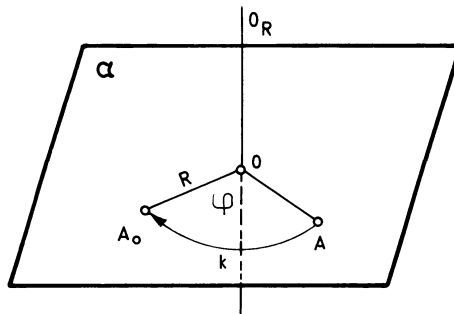
Pridržavajući se izloženog uputstva, može se videti u četvrtoj projekciji da su nevidljivi: tačka H^{IV} i ivice koje izlaze iz nje ($H^{IV} D^{IV}$, $H^{IV} E^{IV}$ i $H^{IV} G^{IV}$)

ZADACI: 1.61. - 1.72.

- 1.61. Nacrtati prvu i drugu projekciju tačke $A(40;30;300)$, a zatim treću projekciju na ravan transformacije $\alpha(20;40;\infty)$.
- 1.62. Odrediti treću projekciju B''' , tačke $B(45;25;45)$ na posebnu ravan transformacije $\varphi(20;\infty;50)$.
- 1.63. Data je ravan $\alpha(10;30;\infty)$ i prava a koja je definisana tačkama $A(-50;-10;20)$ i $B(-20;-30;50)$. U datoj ravni projicirati pravu a .

- 1.64. Metodom transformacije odrediti pravu veličinu duži AB, ako su $A(10;10;20)$ i $B(50;20;10)$.
- 1.65. Dvostrukom transformacijom odrediti najkraće rastojanje tačke $C(20;5;10)$ od prave $a[A(10;10;30), B(40;20;10)]$.
- 1.66. Odrediti najkraće rastojanje između dve mimoilazne prave a i b . Prava a je definisana tačkama A i B , a prava b tačkama C i D . $a[A(10;15;10), B(45;20;5)]$, $b[C(15;10;25), D(45;5;20)]$.
- 1.67. Postaviti ravan transformacije tako da se ravan $\alpha(55;40;20)$ pokaže kao prava.
- 1.68. Projecirati tragove ravni $\alpha(30;25;15)$ na ravan $\beta(40;40;\infty)$.
- 1.69. Naći pravu veličinu paralelograma ABCD i odrediti pravu veličinu ugla što ga paralelogram zaklapa sa horizontalnicom. $A(10;30;15)$, $B(25;40;30)$, $C(35;20;20)$, $D(20;10;5)$.
- 1.70. Transformisati normalnu trostranu prizmu ABCDEF na ravan transformacije $\varepsilon(65;\infty;90)$. Bazis prizme ABC leži u horizontalnici, a visina prizme je definisana tačkama AD. Data su temena prizme: $A(10;0;0)$, $B(25;20;0)$, $C(40;5;0)$ i $D(10;0;30)$.
- 1.71. Za zadatu kosu trostranu piramidu ABCV odrediti, postupkom transformacije treću projekciju u ravni $\alpha(50;\infty;50)$. $A(10;10;0)$, $B(25;30;0)$, $C(35;15;0)$ i $V(0;30;40)$.
- 1.72. Pomoću dve transformacije konstruisati projekciju kocke ABCDEFGH. Bazis kocke ABCD leži u horizontalnici. $A(10;30;?)$, $B(30;30;?)$, $C(30;10;?)$, $D(10;10;?)$, $E(10;30;20)$.

1.8. ROTACIJA



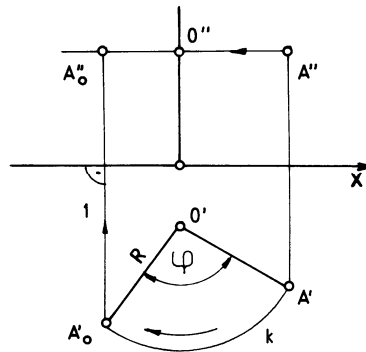
Sl. 1.92. Elementi rotacije

Postupkom rotacije može se jasnije prikazati položaj predmeta, a da se pritom ne menjaju projekcijske ravni kao što je to bio slučaj kod transformacije. Pod pojmom rotacije tačke, duži, prave, slike i tela podrazumeva se njihovo obrtanje oko ose rotacije i dovođenje u nove položaje u odnosu na projekcijske ravni. Pri rešavanju zadataka iz ove oblasti, usvaja se da je osa rotacije normalna ili da leži na projekcijsku ravan. Centar rotacije O , sl. 1.92. je uvek na osi rotacije O_R ili leži u ravni rotacije α . Poluprečnik rotacije R , kao najkraće rastojanje tačke od ose rotacije, rotira sa elementom rotacije -tačka A , u ravni rotacije α , za neki ugao φ (ugao rotacije) u pozitivnom smeru (smer kretanja kazaljke na satu) ili negativnom smeru (suprotan smer kretanja kazaljke na satu). Prema tome, kod svake rotacije mora se poznavati osa i njen položaj, ugao i smer rotacije. U daljem izlaganju proučavaće se postupak rotacije posebno za tačku, duž, pravu, sliku i telo.

1.8.1. Rotacija tačke

Rotacijom tačke A , sl. 1.93. u pozitivnom smeru za ugao φ , tačka opisuje kružni luk (k) u ravni rotacije i prelazi u položaj A_0 . Pošto je ravan rotacije paralelna sa horizontalnicom, to će prva projekcija putanje tačke ($A'A_0'$) biti kružni luk, a druga projekcija - duž $A''A_0''$ paralelna sa x -osom. Druga projekcija okrenutog položaja tačka A_0'' dobija se u preseku projekcijskog zraka 1,

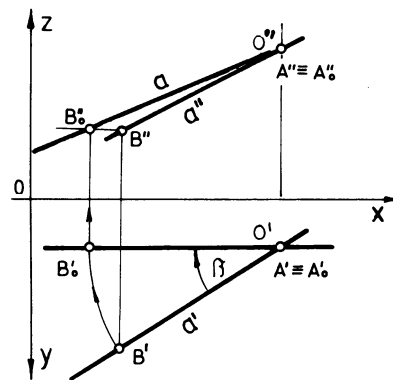
povučenog iz A'_0 i prave povučene iz A'' paralelno sa x-osom. Ugao rotacije φ je u prvoj projekciji u pravoj veličini, jer je ravan rotacije paralelna sa H.



Sl. 1.93. Rotacija tačke

1.8.2. Rotacija prave

Nove projekcije rotirane prave ili duži dobiće se ako se odrede rotirane projekcije tačaka koje definišu pravu ili duž.

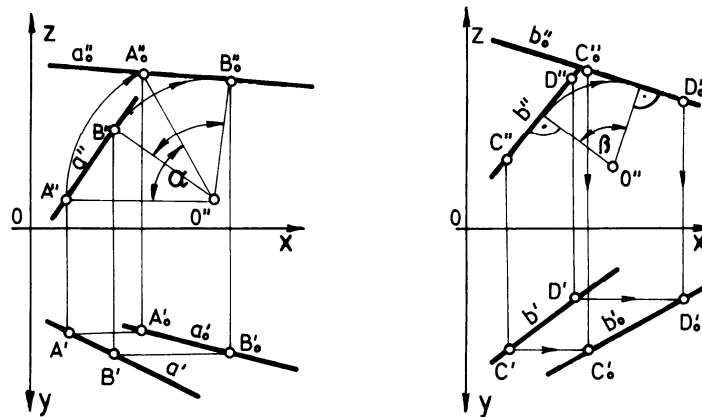


Sl. 1.94. Rotacija prave

Na sl. 1.94. je prikazana rotacija prave a tj. duži AB (kao deo prave). Osa rotacije je normalna na horizontalnicu. Rotiranjem prave a oko ose rotacije o , koja u datom slučaju prolazi kroz tačku A , za ugao β u pozitivnom smeru, dovodi se prava a u paralelan položaj sa vertikalnicom. U vertikalnici (drugoj projekciji) se prava a vidi u pravoj veličini ($A''_0 B''_0 \equiv a_0$).

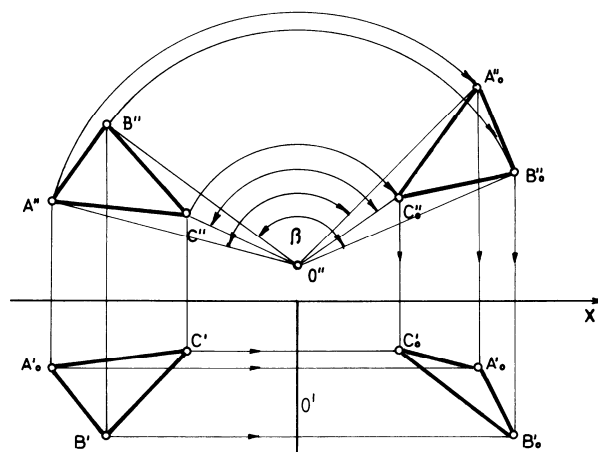
Sem navedenog primera rotacije prave oko ose koja prolazi kroz jednu tačku prave ili duži, na sl. 1.95. su prikazana još dva moguća položaja ose

rotacije u odnosu na pravu: osa rotacije je postavljena proizvoljno van prave, *sl. 95.a.* i osa rotacije je postavljena van prave, a poluprečnik rotacije je normalan na pravu, *sl. 1.95.b.*



Sl. 1.95. Položaj ose rotacije

1.8.3. Rotacija slike



Sl. 1.96. Rotacija slike

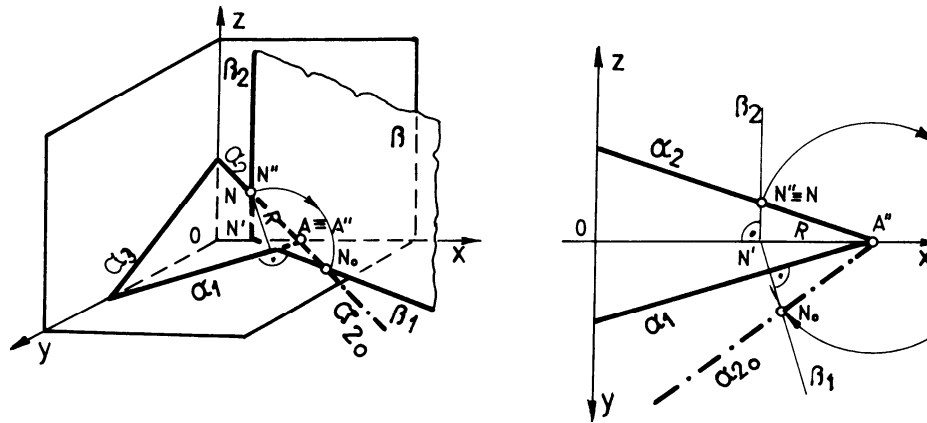
Projekcije rotiranog položaja slike dobijaju se određivanjem projekcija rotiranih karakterističnih tačaka slike.

Tako, na primer, rotiranje trougla ABC za ugao α u pozitivnom smeru oko ose o normalne na vertikalnicu, *sl. 1.96.* može se tretirati kao rotacija temena trougla A, B i C ili kao rotacija duži AB, AC i BC.

S obzirom na položaj ose rotacije, putanje tačaka u drugoj projekciji biće kružni lukovi, a u prvoj pravci koji su paralelni sa x-osom. Ugao rotacije

β je za sve tačke jednak. Prve projekcije rotiranih tačaka A'_0 , B'_0 i C'_0 dobijaju se u preseku projekcijskih zraka povučenih iz A_0'' , B_0'' i C_0'' i pravaca povučenih iz A' , B' i C' paralelno sa x-osom. Povezivanjem tačaka A'_0 , B'_0 i C'_0 dobija se prva projekcija rotiranog trougla.

1.8.4. Obaranje ravni



Sl. 1.97. Rotacija proizvoljne ravni

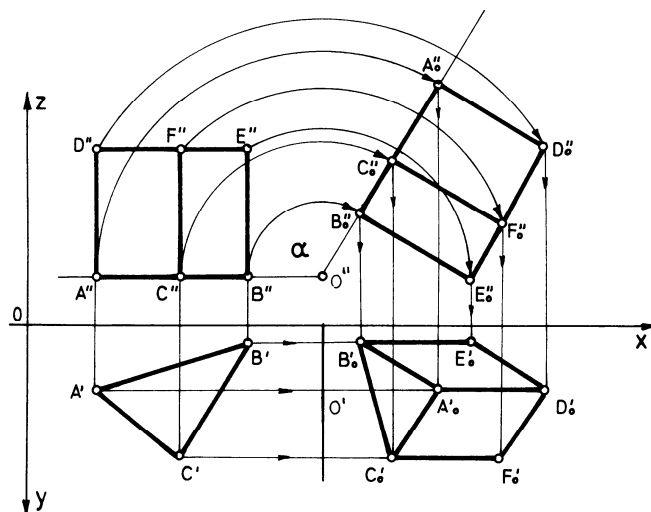
Rotacija proizvoljne ravni oko jednog od sopstvenih tragova ravni i polaganje na projekcijsku ravan naziva se obaranje ravni. Termin "obaranje ravni" se češće koristi u praksi. Postupak obaranja proizvoljne ravni u jednu od projekcijskih ravni, vrlo često, se koristi za određivanje pravih veličina i oblika slika koje leže u proizvoljnoj ravni.

Na sl. 1.97. je prikazan postupak obaranja proizvoljne ravni α , oko prvog traga ravni α_1 kao ose rotacije, u horizontalnicu. Bilo koja tačka N na drugom tragu ravni α_2 opisivaće kružni lukom $N''N_0$ koji leži u ravni rotacije β koja je normalna na horizontalnicu odnosno prvi trag ravni α_1 .

Prvi trag ravni rotacije

β_1 polazi iz N' i leži u istoj ravni sa prvim tragom proizvoljne ravni α_1 , a drugi trag ravni rotacije β_2 normalan je na x-osu i prolazi kroz tačku $N \equiv N''$. Oboreni položaj tačke N_0 , u ortogonalnoj projekciji, određuje se opisivanjem kružnog luka iz centra A'' čiji je poluprečnik $R = A''N''$. Poluprečnik leži u vertikalnici i vidi se u pravoj veličini, $R = AN = A''N''$. U preseku luka $N''N_0$ i prvog traga ravni rotacije β_1 nalazi se tačka N_0 . Prava koja prolazi kroz tačke A'' i N_0 predstavlja oboren drugi trag ravni α_{2_0} . Oborena ravan, (α_1, α_{2_0}) leži u horizontalnici i vidi se u pravoj veličini.

1.8.5. Rotacija tela



Sl. 1.98. Rotacija tela

Rotacija tela se vrši, kao i u prethodnim slučajevima, rotacijom karakterističnih tačaka tela. Na sl. 1.98. je prikazan postupak rotacije trostrane prizme, gde je ugao rotacije $\alpha = 120^\circ$, a smer pozitivan. Osa rotacije o je normalna na vertikalnicu, a krugovi rotacije svih temena prizme u drugoj projekciji vide se u pravoj veličini, a u prvoj projekciji se projektuju kao prave linije normalne na prvu projekciju ose rotacije O' . Rotirana projekcija tela u drugoj projekciji, (tačke od A_0'' do F_0''), dobija se ako svako teme prizme bude zarotirano za ugao od 120° , a rotirana prva projekcija dobija se u preseku projekcijskih zrakova povučenih iz tačaka od A_0'' do F_0'' i pravaca povučenih iz tačaka A' , B' i C' paralelno sa x-osom. Povezivanjem rotiranih tačaka u obe projekcije dobijaju se odgovarajuće projekcije rotiranog tela.

Vidljivost rotiranih projekcija prizme određuje se istim postupkom kao i u prethodnim slučajevima. U datom primeru u prvoj i drugoj projekciji su vidljiva sva temena i sve ivice prizme.

ZADACI: 1.73 - 1.84.

- 1.73. Postupkom rotacije odrediti pravu veličinu zadate duži AB, ako je $A(20;10;30)$, $B(60;25;10)$.
- 1.74. Duž AB rotirati 60° u pozitivnom smeru (smer kretanja satne

kazaljke) oko ose obrtanja o . Osa obrtanja je normalna na horizontalnicu i prolazi kroz tačku $S(10;10;15)$. $AB[A(20;10;30), B(60;5;10)]$.

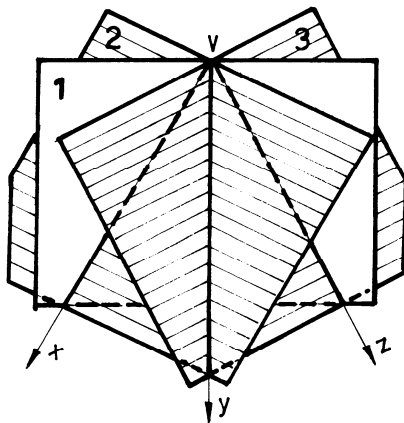
- 1.75. Nacrtati prvu i drugu projekciju trougla ABC u rotiranom položaju za ugao 60° . $ABC [A(10;20;15), B(35;15;25), C(25;35;5)]$. Osa rotacije je normalna na horizontalnicu i prolazi kroz tačku $S(50;0;0)$.
- 1.76. Nacrtati sva tri traga ravni $\alpha(50;30;25)$ položena u horizontalnicu.
- 1.77. Ravan $\alpha(70;25;20)$ rotirati oko prvog traga ravni za ugao 15° .
- 1.78. U ravni $\alpha(70;30;40)$ leži tačka $A(20;5;?)$. Rotirati tačku A oko prvog traga ravni α dok ne legne u horizontalnicu.
- 1.79. Rotacijom odrediti pravu veličinu ugla α između presečnih pravi a i b . Prava a je definisana tačkama A i B , a b tačkama C i B . $A(10;20;10), B(45;5;30), C(75;25;15)$.
- 1.80. Odrediti pravu veličinu bočnih ivica kose trostrane piramide $ABCV$. $A(80;10;0), B(60;40;0), C(40;30;0), V(10;60;50)$.
- 1.81. Rotirati, u negativnom smeru za ugao 120° , kosu trostranu piramidu $ABCV$ oko ose o . Osa rotacije je normalna na horizontalnicu i prolazi kroz tačku $S(70;10;20)$. $A(10;10;10), B(30;30;10), C(45;15;10), V(60;30;50)$.
- 1.82. Rotirati, za ugao od 120° u pozitivnom smeru, normalnu trostranu piramidu $ABCV$ čiji bazis ABC leži u horizontalnici oko ose o . Osa rotacije prolazi kroz tačku $P(65;30;10)$ i normalna je na vertikalnicu. Bazis je određen tačkama: $A(0;20;?)$, $B(30;45;?)$ i $C(55;10;?)$, dok je vrh definisan tačkom $V(30;25;25)$.
- 1.83. Trostranu normalnu prizmu $ABCDEF$ rotirati oko ose rotacije $o[K(10;10;45), N(10;25;45)]$ u negativnom smeru za ugao 30° . Temena tela su: $A(10;10;45), B(20;30;45), C(35;20;45)$ i $D(10;10;10)$.
- 1.84. Kocku $ABCDEFGH$ rotirati oko ose $o[K(60;20;10), N(60;10;10)]$ u pozitivnom smeru za ugao 120° . Temena bazisa kocke: $A(10;30;10), B(30;10;10), C(50;30;10), D(30;50;10)$.

1.9. TELA I NJIHOVE PROJEKCIJE

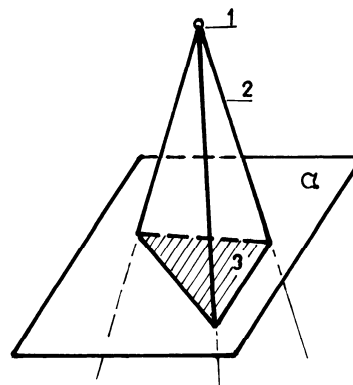
1.9.1. Projeciranje rogljastih tela

1.9.1.1. Piramide

Rogljem se naziva geometrijska figura koju čine poluprave $V_x V_y V_z \dots$ koje polaze iz iste tačke. Tačka V je teme roglja; poluprave V_x, V_y, V_z, \dots su ivice roglja; uglovi koje grade dve uzastopne ivice zovu se strane ili ivični uglovi roglja.



Sl. 1.99. Nastanak rogljaste površine



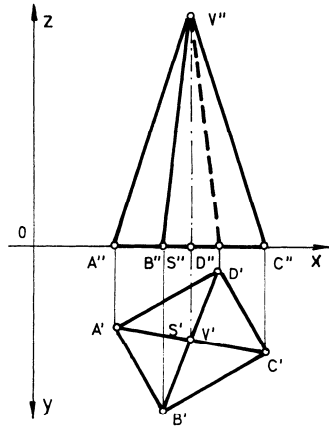
Sl. 1.100. Nastanak piramide

U nacrtnoj geometriji proučavaju se rogljaste ravni i oble površine. Rogljasta površina, *sl. 1.99.* nastala presekom najmanje tri ravni i presečena posebnom ravni α , obrazuje rogljasto telo - piramidu, *sl. 1.100.*

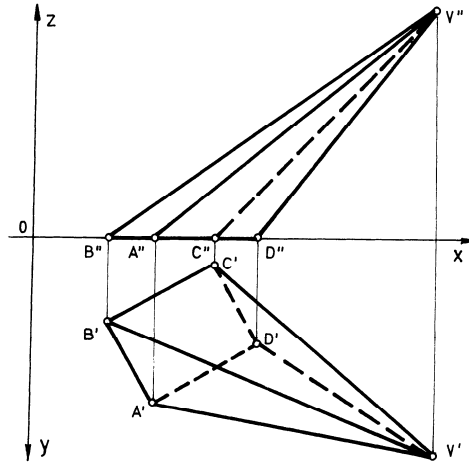
Delovi piramide su: 1-vrh (presek ivica), 2-ivice (presek ravni) i 3-bazis. Zavisno od broja ravni koje se seku u vrhu, nastaju trostrane, četverostrane, petostrane piramide.... Piramide mogu biti normalne sa osama normalnim na bazis, *sl. 1.101* i kose sa osama prema bazisu pod uglom različitim od 90° , *sl. 1.102*. Kod normalnih piramida ivice su jednake i jednako nagnute prema bazisu, a vrhovi padaju u centar opisanog kruga bazisa. A ukoliko je i bazis normalnih piramida pravilni mnogougao, nazivaju se pravilne piramide.

Za definisanje položaja piramida koristi se sistem projekcijskih ravni, odnosno koordinatni prostorni projekcijski sistem. Polazeći od toga da su

piramide trodimenzionalna tela sastavljena od tačaka, duži i ravni, to se one, primenom pravila projiciranja, lako prostorno definišu. Potrebno je samo pravilno definisati karakteristične tačke piramida: vrhove, temena, i težišta bazisa.

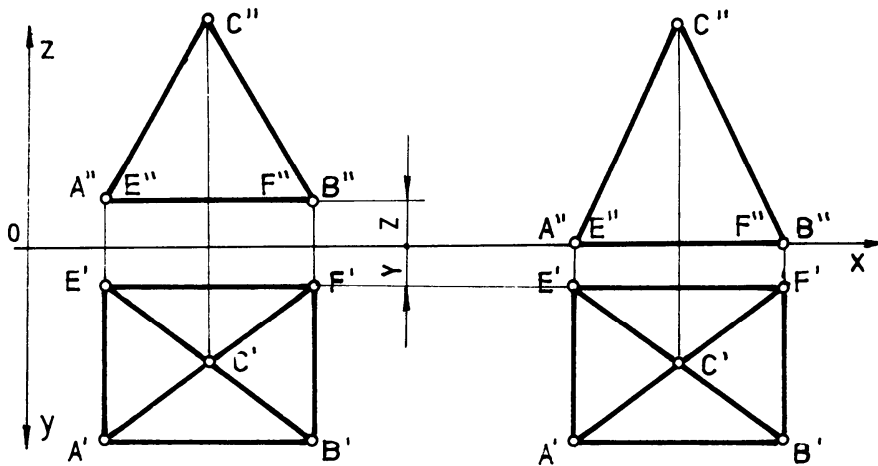


Sl. 1.101. Normalna piramida



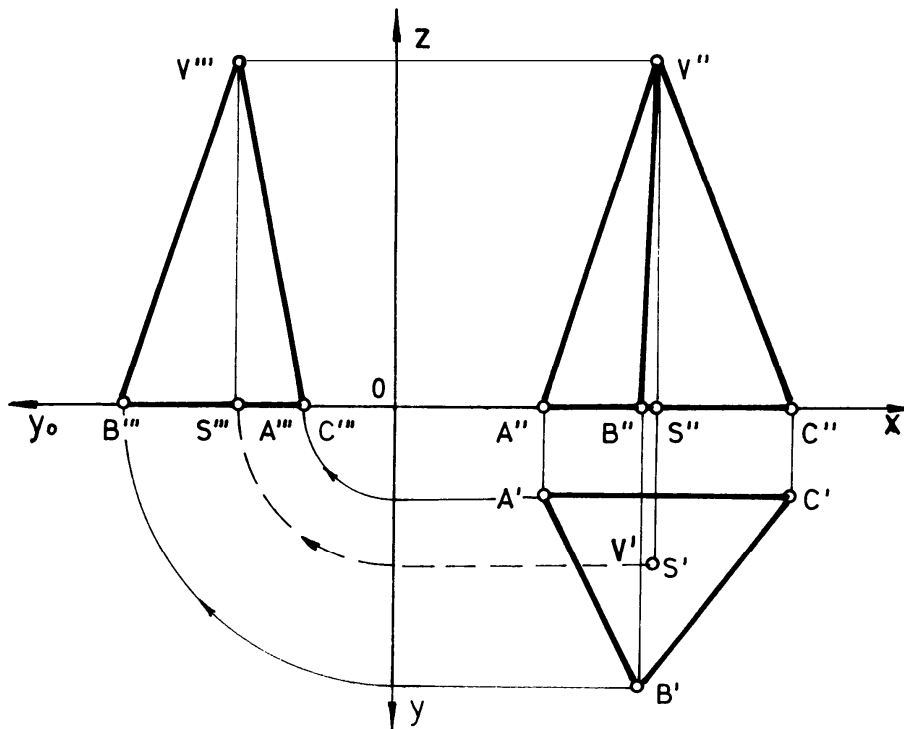
Sl. 1.102. Kosa piramida

Prilikom projiciranja piramida, sl. 1.103. treba ih postavljati tako da su bazisi paralelni sa horizontalnicom ili da leže na njoj, a da pritom jedna stranica bude paralelna sa vertikalnicom. Ovakvo postavljenje omogućuje da se udaljenost bazisa piramide od horizontalnice (z) u drugoj projekciji



Sl. 1.103. Položaj piramide pri projiciranju

vidi u pravoj veličini, a udaljenost od vertikalnice (y) u prvoj projekciji prikazuje kroz udaljenja najbližih tačaka piramida od x-ose.



Sl. 1.104 Projeciranje prave piramide

Na sl. 1.104. je pokazano projeciranje prave trostrane piramide čiji bazis leži u horizontalnici. Prava veličina bazisa se vidi u prvoj projekciji, a u drugoj projekciji se vidi prava veličina visine piramide. Zbog kosog položaja bočne strane piramide su u sve tri projekcije deformisane.

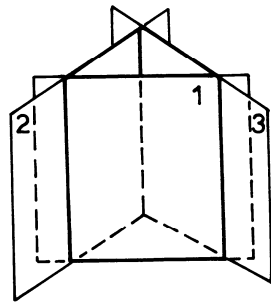
1.9.1.2. Prizme

Ako su ivice rogljastog tela paralelne, sl. 1.105, one obrazuju prizmatičnu površinu. Prizmatična površina je sastavljena od delova ravni ograničenih paralelnim pravama koje su njene ivice.

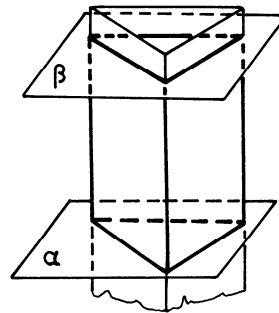
Svaki od ovih delova ravni je strana prizmatične površine.

Svaki presek prizmatične površine i ravni koja nije paralelna ivicama je poligon čiji je broj stranica jednak broju strana te površine.

Presecanjem prizmatične površine dvema međusobno paralelnim ravnima α i β , sl. 1.106, koje nisu paralelne bočnim ivicama dobija se prizma.

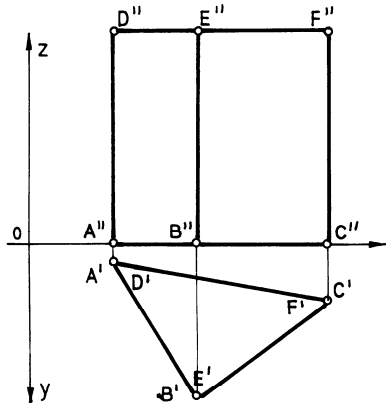


Sl. 1.105. Nastanak prizmatične površine

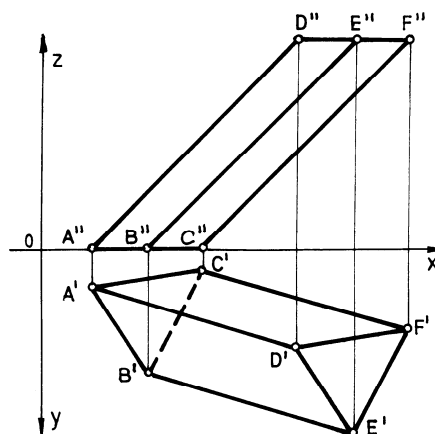


Sl. 1.106. Nastanak prizme

Prema konstruktivnom izgledu, prizma može biti normalna (prava), *sl.1.107*, ako su joj ivice normalne na bazu i kosa, *sl. 1.108*. ako su joj ivice prema bazu pod uglom različitim od 90° .



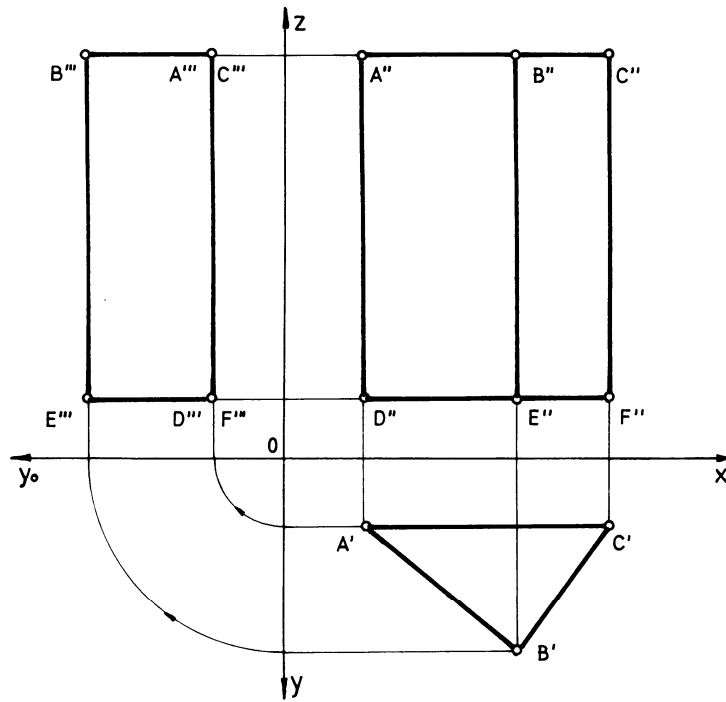
Sl. 1.107. Normalna prizma



Sl. 1.108. Kosa prizma

Projeciranje prizmi, *sl. 1.109*. je identično u postupku sa projeciranjem piramida. Primenom pravila projeciranja u sistemu projekcijskih ravni, prizme se mogu lako prostorno definisati, pod uslovom da ima podataka o karakterističnim tačkama. Karakteristične tačke - elementi prizmi su temena, ivice, visine i težišta bazisa. Osobine prizmi treba iskoristiti prilikom njihovog projeciranja tako, da se bazisi i ivice tela uvek postavljaju paralelno sa projekcijskim ravnima. Na taj način će se sve horizontalne i verikalne ivice videti u pravoj veličini u prvoj odnosno

drugoj projekciji. Ovaj uslov ima praktičnu primenu u tehničkom crtanju, jer se kotiranje izvodi na pravim veličinama. Inače, u većini slučajeva, za jasno definisanje simetričnih prizmi, dovoljne su samo dve projekcije, prva i druga.



Sl. 1.109. Projeciranje prave prizme

1.9.2. Projeciranje obliih tela

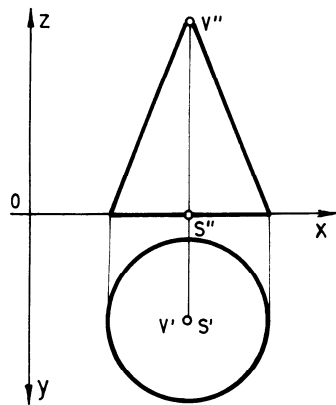
1.9.2.1. Kružni konusi



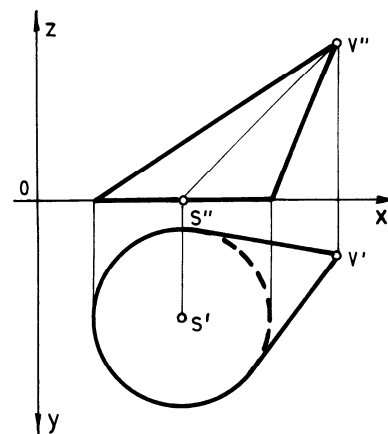
Sl. 1.110. Nastanak kružnog konusa

Izvodnica s , na *sl. 1.110.a.* koja se kreće po krivoj liniji i pritom stalno prolazi kroz tačku V , opisuje konusnu površinu. Ako izvodnica s , prolazi kroz tačku V , i pri kretanju dodiruje kružnu liniju, kao na *sl. 1.110.b.*, ona opisuje kružnu konusnu površinu. Presecanjem kružne konusne površine sa ravni α , *sl. 1.110.c.*, nastaje kružno konusno telo - kružni konus.

Kružni konus nastaje i rotacijom pravouglog trougla oko jedne katete, *sl. 1.110.d.* Kateta h oko koje se rotira trougao predstavlja osu, odnosno visinu tela; druga kateta r biće poluprečnik bazisa, a hipotenuza pravouglog trougla s formira izvodnicu konusa. Zavisno od položaja ose prema bazisu kružni konus može biti normalan, *sl. 1.111.* ili kos, *sl. 1.112.*



Sl. 1.111. Normalan kružni konus



Sl. 1.112. Kosi kružni konus

Kod normalnog kružnog konusa izvodnice su iste veličine, dok su kod kosog kružnog konusa različite. Karakteristične tačke, odnosno elementi za projiciranje kružnog konusa, *sl. 1.110.d.* su: vrh V , centar S i prečnik bazisa r , konturna izvodnica s i visina h . Pored nabrojanih karakterističnih elemenata kružnog konusa, posebnu pažnju treba obratiti na dopunske karakteristične tačke bazisa. Naime, sve dopunske tačke na krugu služe isključivo za definisanje ostalih dopunskih izvodnica pomoću kojih se rešavaju preseki konusa. Zato pri podeli kruga na jednake uglovne delove, vodi se računa da je broj podela uvek paran i da su u podelu uključene i četiri karakteristične tačke kruga. Karakteristične tačke kruga nastaju u preseku dva prečnika postavljenim jedan prema drugom pod uglom od 90° . Pri izboru položaja kružnog konusa prema projekcijskim ravnima, krug bazisa treba postavljati tako da je paralelan sa horizontalnicom ili da leži u njoj. U tom slučaju, bazis konusa projiciran na horizontalnicu je u

10. PRESECI TELA SA RAVNIMA I MREŽE

Oblik preseka, dobijen presecanjem nekog tela sa ravni, zavisi od oblika tela i položaja presečne ravni prema telu. Presekom rogljastog tela i ravni, u zavisnosti od položaja presečne ravni prema telu, dobija se ravan slična bazisu tela ili površina ograničena dvema presečnim pravama. I presek oblog tela zavisi od oblika tela i položaja presečne ravni prema telu i može biti: krug, elipsa, parabola, hiperbola, trougao, pravougaonik i kvadrat. Takođe, između bazisa i preseka postoji srodnost, jer svaka strana bazisa ima odgovarajuću stranu preseka. Kod piramide i kružnog konusa, to je perspektivna kolineacija, gde je bazis kolinearan sa presekom; osa kolineacije je prava po kojoj se seku presečna ravan i bazis; ivice piramide i izvodnice konusa su zraci kolineacije; a vrh piramide i konusa centar kolineacije. Kod prizme i kružne oblice su: bazis i ravan preseka dve perspektivno afine slike; osa afiniteta prava, po kojoj se seku bazis i ravan preseka; a zraci afiniteta ivice i izvodnice prizme i kružne oblice.

Konstrukcija preseka tela, svodi se na određivanje prodora svake ivice rogljastog ili izvodnice oblog tela kroz presečnu ravan pomoću metode direktnih prodora ili kolineacije i afiniteta.

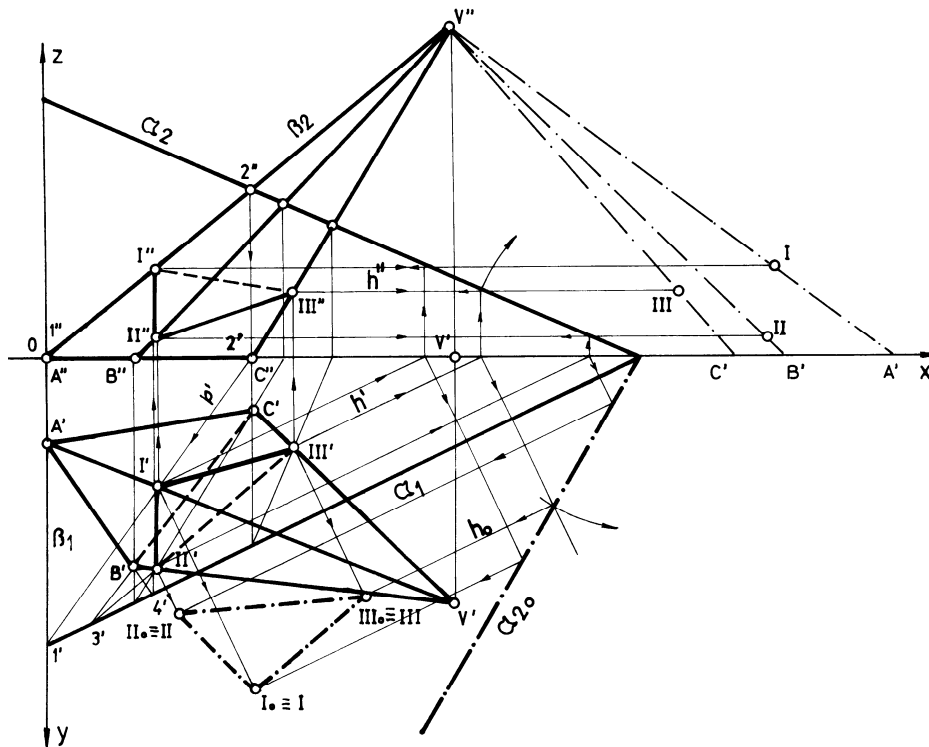
Mreža tela se sastoji od bazisa i omotača. Kako se mreža crta u pravoj veličini, neophodno je da se odrede prave veličine bazisa i omotača tela. Ako je telo presečeno nekom ravni i zahteva se crtanje mreže površi tela između bazisa i preseka, ili mreže iznad preseka, treba odrediti i pravu veličinu preseka. Uslov za pravilnu i tačnu izradu crteža mreže je dobro poznavanje postupaka određivanja pravih veličina bazisa, preseka, ivica i izvodnica zadatih tela.

Postupak konstruisanja preseka i crtanje mreža rogljastih i oblih tela (piramide, prizme, kružnog konusa i kružne oblice) je objašnjen na sledećim primerima:

1.10.1. Ravan presek i mreža piramide

1.10.1.1. Presek kose piramide i ravni $\alpha(\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z)$

Tačke preseka kose trostrane piramide ABCV i ravni α , određene su metodom direktnih prodora, kao neposredni prodori ivica piramide kroz presečnu ravan.



Sl. 1.118. Konstrukcija preseka kose trostrane piramide

Pri određivanju prodora ivice AV kroz ravan α , postavlja se kroz ivicu AV pomoćna ravan $\beta(\beta_1, \beta_2)$, normalno na vertikalnicu, tako da prvi trag ravni β_1 stoji upravno na x-osu, a drugi trag ravni β_2 se poklapa sa drugom projekcijom ivice A''V''. Presek proizvoljne ravni α i pomoćne ravni β je prava p sa prodorima u tačkama 1 i 2. U preseku prve projekcije presečne prave p' (duž 1'-2') i prve projekcije ivice piramide A''V'' dobija se prva projekcija tačke prodora I'. Povlačenjem projekcijskog zraka-ordinate iz prve projekcije I' do preseka sa drugom projekcijom ivice A''V'' definiše se druga projekcija tačke prodora I''. Ponavljanjem postupka i za ostale ivice piramide, BV i CV, određuju se njihove tačke prodora sa ravni α , odnosno njihove projekcije u horizontalnici i vertikalnici. Međusobnim spajanjem tačaka prodora I'-II'-III'-I' u prvoj i I''-II''-III''-I'' u drugoj projekciji određuju se projekcije preseka trostrane piramide ABCV i ravni α .

S obzirom da su preseki u obe projekcije kolinearni sa projekcijama bazisa (u prvoj projekciji osu kolineacije predstavlja prvi trag ravni α_1 ; zrake kolineacije - ivice piramide AV, BV i CV; a centar kolineacije vrh piramide V) može se proveriti tačnost crtanja preseka postupkom

kolineacije. Tako, na datom primeru, *sl. 1.118.* u tački 3', na tragu ravni α_1 , moraju se seći prave koje prolaze kroz B'-C' i II'-III'. Istim postupkom, pomoću tačaka 4' i na prvom tragu ravni α_1 , proveravaju se stranice bazisa i preseka, A'-B' i I'-II'.

Prava veličina preseka dobija se u oborenoj ravni (α_1, α_{20}). Ravan je oborena oko prvog traga ravni α_1 u horizontalnici, Postupak obaranja ravni u horizontalnici već je prikazan u tački 1.8.4., (*sl. 1.97*) i ovom prilikom neće biti objašnjavan. Biće prikazan samo postupak dobijanja prave veličine preseka u oborenem položaju, pomoću rotiranih sutražnica. Iz tačaka preseka u prvoj projekciji I' II' III' povlače se prave paralelno sa tragom ravni α_1 do x-ose. Iz preseka ovih pravi sa x-osom, povlače se normale-spone na prvi trag ravni α_1 do oborenog traga ravni α_{20} , a zatim iz tih preseka, kako je strelicom naznačeno, povlače se paralele sa tragom α_1 . U preseku paralela sa normalama povučениh iz tačaka I' II' III' dobijaju se tačke I₀, II₀ i III₀. Međusobnim spajanjem tačaka I₀, II₀ i III₀, određuje se prava veličina preseka. Opisani postupak za konstruisanje prave veličine preseka može se koristiti za sva rogljasta i obla tela.

Bazis ABC date piramide leži u horizontalnici, pa je trougao u prvoj projekciji A'B'C' u pravoj veličini.

Prava veličina ivice piramide, označene linijom crta-tačka-crta, određuje se postupkom pravouglih trouglova.

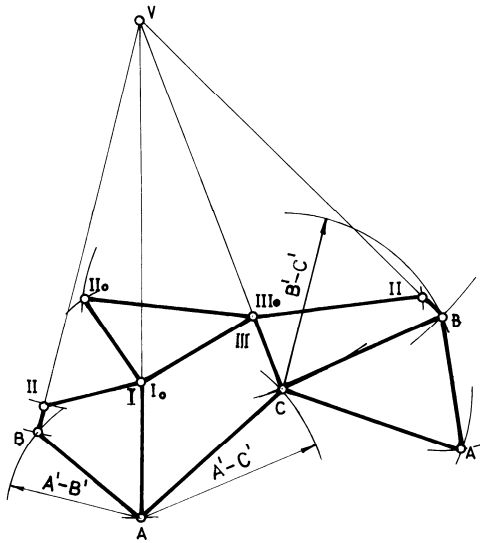
Stvarno udaljenje tačke prodora I, II i III od horizontalnice dobija se povlačenjem paralelnih pravaca sa x-osom od tačaka I'', II'' i III'' do preseka sa pravim veličinama ivica piramide, *sl. 1.116.* To znači da su duži A-I=A'-I, B-II II=B'-II i C-III=C'-III stvarne veličine ivica između presečne ravni α i horizontalnice.

• Mreža kose piramide ispod preseka

Konstrukcija mreže, *sl. 1.119*, počinje sa nanošenjem prave veličine najduže ivice VA=V"A'. Iz tačke A se opišu lukovi, poluprečnika A'B' i A'C', koji odgovaraju pravoj veličini stranica bazisa. Zatim se iz tačke V opišu lukovi poluprečnika VB=V"B' i VC=V"C' do preseka se prethodno nacrtanim lukovima.

U preseku ovih lukova određuju se tačke B i C. Spajanjem tačaka A-B, A-C, V-B i V-C dobijaju se dve površine omotača piramide, trougao ABV i ACV. Treća površina, trougao BCV crta se po određivanju položaja tačke C. U preseku luka poluprečnika B'C' opisanog iz tačke B i luka poluprečnika VC=V"C' opisanog iz centra V dobija se tačka C. Spajanjem tačaka B-C i V-C određena je i treća površina omotača piramide, trougao BCV. Linija preseka (poligonalna linija) se određuje tako što se na prave

veličine ivica mreže nanose pravi položaji tačaka I, II i III, odnosno duži A-I, B-II i C-III.



Sl. 1.119. Konstrukcija mreže kose trostrane piramide

Spajanjem tačaka I-II-III-I, konstruisana je presečna linija omotača piramide. Prava veličina bazisa A'B'C' se crta na proizvoljno izabranoj ivici bazisa, a prave veličine preseka, $\Delta I_0II_0III_0$ konstruiše se na presečnoj liniji I-II-III-I.

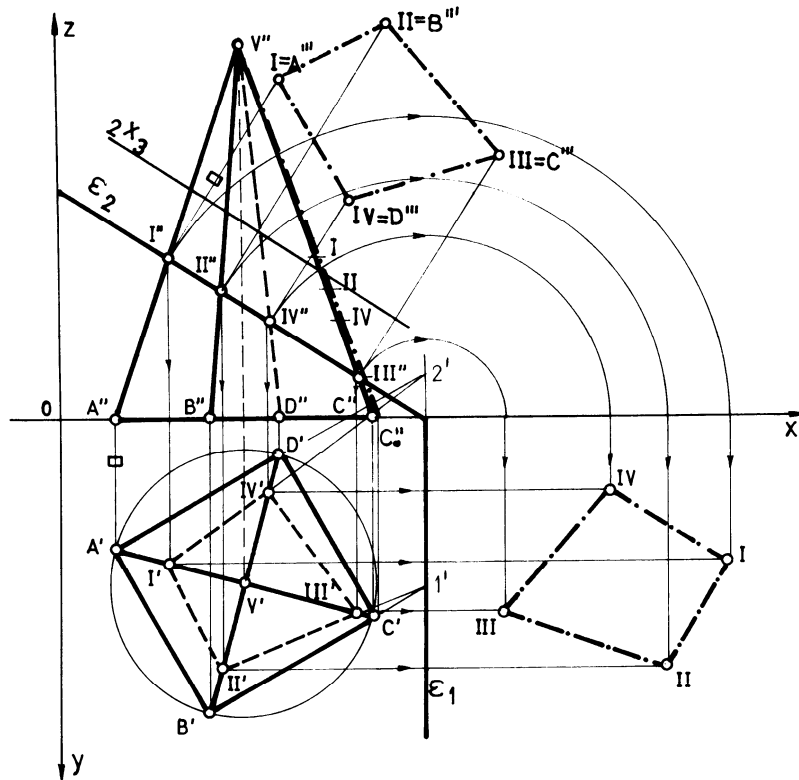
Mreža ispod preseka označena je punim debelim linijama, a iznad punim tankim linijama.

1.10.1.2. Presek normalne piramide i ravni $\varepsilon(\varepsilon_x; \infty; \varepsilon_z)$.

Bazis normalne četverostrane piramide, sl. 1.120. leži u horizontalnici. Presečna ravan ε je normalna na vertikalnicu, a sa horizontalnicom zaklapa neki ugao. Tačke preseka I'', II'', III'' i IV'', nastale prodorom ivica A''V'', B''V'', C''V'' i D''V'' kroz ravan ε , leže tj. projiciraju se na tragu ravni ε_2 . Presek u drugoj projekciji vidimo kao duž I-III i poklapa se sa drugom projekcijom drugog traga ravni ε_2 . Ravan preseka u prvoj projekciji, tačke I', II', III' i IV', određuje se povlačenjem ordinate iz prodornih tačaka druge projekcije I'', II'', III'' i IV'' do preseka sa odgovarajućim bočnim ivicama prve projekcije: A'V', B'V', C'V' i D'V'. Spajanjem tačaka I'-II'-III'-IV'-I' linijama, tip E, dobija se prva projekcija preseka.

Preciznost konstrukcije preseka može se proveriti kolineacijom, gde je vrh piramide V centar kolineacije, a trag ravni ε_1 osa kolineacije. Naime,

ako je konstrukcija precizno crtana u tački 1' će se seći prave koje prolaze kroz B'-C' i II'-III', a kroz tačku 2' će prolaziti pravci A'-D' i I'-IV'.



Sl. 1.120. Konstrukcija preseka normalne četvorostrane piramide

Prava veličina preseka, sl. 1.118, određena je transformacijom, odnosno obaranjem treće projekcijske ravnine oko ose $2x_3$ u vertikalnu projekcijsku ravan, tj. postavljanjem treće projekcijske ravnine normalno na vertikalnicu i paralelno sa drugom projekcijom preseka, a zatim primenom postupka transformacije (videti tačku 1.7.3), dobija se u trećoj projekciji četvorougao A'''B'''C'''D'''. Četvorougao u trećoj projekciji predstavlja pravu veličinu preseka.

Na sl. 1.120. prikazan je i drugi način određivanja prave veličine preseka: rotacijom cele ravnine ε ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) oko njenog prvog traga ε_1 dok se ne pokolopi sa ravni horizontalnice.

Prava veličina bočne ivice normalne piramide, duž $C_0''V''$, dobija se postupkom rotacije, tj. dovođenjem ivice VC u položaj paralelnosti sa verikalnicom. Stvarni položaj prodornih tačaka I, II, III i IV dobija se na pravoj veličini ivice $V''C_0''$, tako što se iz druge projekcije tačaka I'', II'',

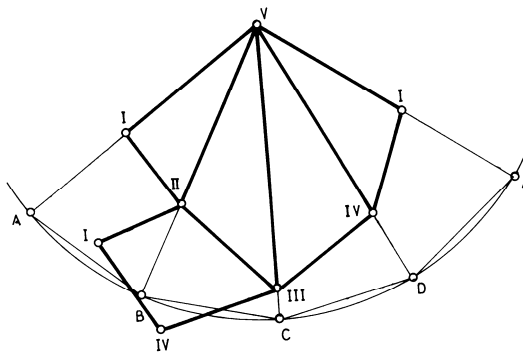
III" i IV" povuku pravci paralelni sa horizontalnicom, odnosno sa x-osom do preseka sa pravom veličinom ivice.

Bazis piramide u prvoj projekciji A'B'C'D' je prave veličine jer leži u ravni horizontalnice.

- **Mreža normalne piramide iznad preseka**

Konstrukcija mreže normalne piramide iznad preseka, sl. 1.121. počinje sa nanošenjem (šestarom) ivica bazisa A'B'=AB, B'C'=BC, C'D'=CD i A'D'=AD od tačke A, na opisani luk čiji poluprečnik $R=V''C_0''$ predstavlja pravu veličinu ivice piramide, a centar V vrh piramide. U preseku lukova određena su temena A,B,C,D. Međusobnim spajanjem temena i vrha konstruisan je omotač piramide. Linija preseka definisana je međusobnim spajanjem stvarnih položaja prodora I-II-III-IV-I.

Na liniji preseka konstruiše se presek u pravoj veličini, a zatim se mreža iznad preseka crta punim debelim linijama, a deo piramide između horizontalnice i ravni preseka punim tankim linijama.



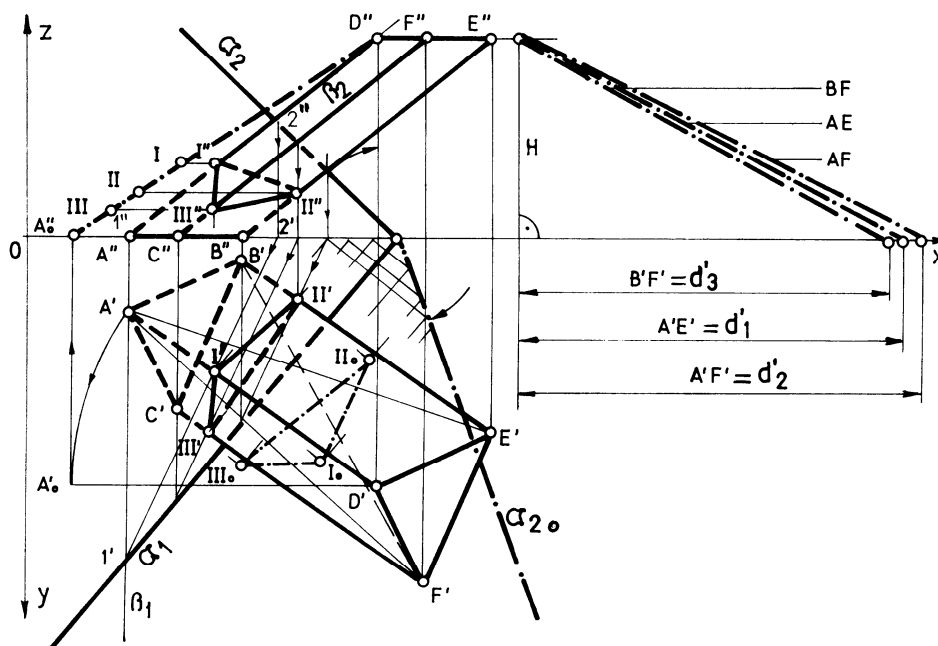
Sl. 1.121. Konstrukcija mreže normalne piramide

1.10.2. Ravan presek i mreža prizme

1.10.2.1. Presek kose prizme i ravni $\alpha(\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z)$

Na sl. 122. je prikazana metoda direktnih prodora za određivanje preseka kose trostrane prizme ABCDEF sa bazisom ABC u ravan horizontalnice i proizvoljne ravni $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$. Metoda direktnih prodora je naročito efikasna i pouzdana za prizme sa malim brojem ivica i za slučaj kada je presečna ravan u specijalnom položaju. Da bi se odredio prodor ivice AD kose prizme kroz ravan α , postavlja se kroz ivicu AD pomoćna ravan $\beta(\beta_1, \beta_2)$

normalno na ravan V . Kako je pomoćna ravan u u specijalnom položaju, njen prvi trag ravni β_1 stoji normalno na x-osu, a drugi trag β_2 poklapa se sa drugom projekcijom ivice prizme $A''D''$. Presek ravni α i β , odnosno presek prve projekcije preseka ($1'2'$) i prve projekcije ivice $A'D'$, određuje prvu projekciju prodora (I') ivice AD kroz ravan α . Povlačenjem ordinate iz prve projekcije prodora (I') do preseka sa $A''D''$ dobija se druga projekcija prodora (I''). Ponavljanjem postupka i za ostale ivice prizme BE i CF određuju se druge dve tačke prodora (II i III) kroz ravan α , odnosno njihove projekcije II' i III' u horizontalnici i II'' i III'' u vertikalnici. Međusobnim spajanjem presečnih tačaka - prodora I' II' III' u prvom i I'' II'' III'' u drugoj projekciji, definišu se projekcije presečne ravni nastale presekom proizvoljne ravni α i kose trostrane prizme $ABCDEF$.



Sl. 1.122. Konstrukcija preseka kose prizme

Prava veličina preseka, *sl. 122.* dobija se u oborenoj ravni (α_1, α_{2_0}) pomoću rotiranih sutražnica. Postupak nalaženja prave veličine preseka (trougao I_0, II_0, III_0) je isti kao i kod kosih piramida pomoću rotiranih sutražnica).

Prave veličine bočnih ivica prizme $AD=BE=CF=A_0''D''$ (ivice su jednake dužine, jer su bazisi međusobno paralelni) određuju se u drugoj projekciji

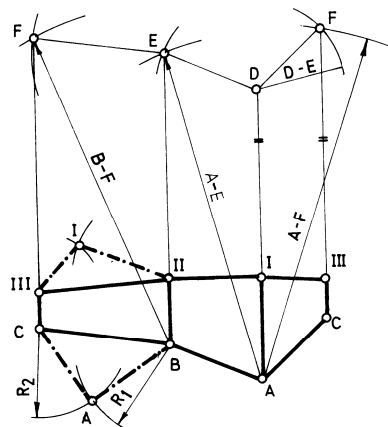
postupkom rotacije prve projekcije $A'D'$, oko ose rotacije koja prolazi kroz tačku D i normalna je na horizontalnicu.

Stvarni položaji prodornih tačaka I II i III nalaze se na pravim veličinama bočnih ivica ($A_0''D''$), a dobijaju se povlačenjem paralelnih pravaca sa x-osom od I'' II'' i III'' do preseka sa $A_0''D''$.

Kako omotač prizme čine tri paralelograma, to za konstruisanje mreže prizme, odnosno za konstruisanje pojedinačno svakog paralelograma omotača, moraju se odrediti i prave veličine dijagonala $d_1=AE$, $d_2=AF$ i $d_3=BF$. Prave veličine dijagonala d_1 , d_2 i d_3 dobiju se pomoću prvih projekcija dijagonala d_1' , d_2' i d_3' i visine prizme H metodom pravougljih trougla, *sl. 1.122*.

• Mreža kose prizme ispod preseka

Na *sl. 1.123*. je prikazana konstrukcija mreže kose trostrane prizme presečene proizvoljnom ravni. Mreža trostrane kose prizme $ABCDEF$ sastoji se iz donjeg i gornjeg bazisa (dva trougla ABC i DEF) i omotača (tri paralelograma $ABED$, $BEFC$ i $CFDA$). Za crtanje mreže ispod preseka, potrebne su prave veličine: preseka, bazisa i omotača. Stvarna veličina donjeg bazisa, očitava se direktno iz prve projekcije (trougao $A'B'C'$), jer bazis leži u ravni horizontalnice.



Sl. 1.123. Konstrukcija mreže kose prizme

Konstrukcija omotača kose trostrane prizme počinje crtanjem paralelograma $ABED$, tj. nanošenjem prave veličine bočne ivice AD na pravac povučen iz tačke A . Opisivanjem luka, poluprečnika prave dužine dijagonale $d_1=AE$ iz tačke A i luka poluprečnika $R_1=A'B'$ iz tačke D , dobija se presečna tačka E . Zatim se iz tačke E povlači prava paralelno sa

AD, a iz tačke A paralela $AB \parallel DE$. U preseku ovih prava je tačka B. Spajanjem presečnih tačaka dobija se prva stranica omotača prizme-paralelogram ABED.

Paralelogram BCFE konstruiše se istim postupkom. Iz tačke B nanese se lukom prava veličina dijagonale $d_3=BF$, a iz tačke E, šestarom, se opiše luk poluprečnika prave veličine ivice bazisa B'C'. U preseku se dobija tačka F. Iz tačke F povlači se paralela sa ivicom BE, a iz tačke B paralela sa ivicom EF do njihovog preseka, gde se nalazi tačka C. Spajanjem tačaka određuje se druga stranica omotača prizme-paralelogram BCFE.

Treći paralelogram omotača prizme ACFD određuje se istim postupkom: pomoću dijagonale $d_2=AF$ i stranice bazisa A'C'=DF.

Izlomljena linija III-II-I-III, tzv. linija preseka, je presek omotača prizme i proizvoljne ravni α . Linija preseka se dobija spajanjem nanešenih stvarnih položaja duži D"-I, D"-II i D"-III na odgovarajuće ivice omotača prizme.

Na proizvoljno izabranoj stranici donjeg bazisa CB, u preseku lukova poluprečnika A'B' i A'C' konstruiše se tačku A. Međusobnim spajanjem tačaka A, B i C dobija se prava veličina bazisa prizme, a zatim se na liniji preseka, na slobodno izabranoj stranici (duž II-III), *sl. 1.123*, ucrtava prava veličina preseka $I_0-II_0-III_0$.

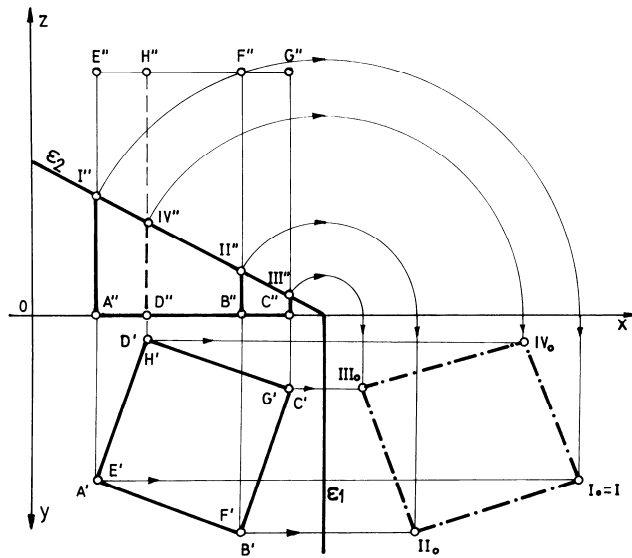
Mreža kose trostrane prizme ispod preseka, nacrtana je punim debelim linijama.

1.10.2.2. Presek normalne prizme i ravni $\varepsilon(\varepsilon_x;\infty;\varepsilon_z)$

Specijalna ravan ε , koja seče normalnu četvorostranu prizmu, normalna je na vertikalnicu, a sa horizontalnicom zaklapa neki ugao. Prodori I", II", III" i IV" ivica AE, BF, CG i DH normalne četvorostrane prizme kroz ravan ε očitavaju se direktno na drugom tragu ε_2 ravni, a presek u istoj ravni se pojavljuje kao duž I"-III". U horizontalnici se projekcija bazisa A'B'C'D' i preseka I"II"III"IV" poklapaju, jer su ivice prizme normalne na horizontalnicu. Deo drugog traga ε_2 ravni, koji je zaklonjen prizmom, prikazan je isprekidanom linijom.

Pravi oblik i veličina preseka, četvorougao $I_0II_0III_0IV_0$, dobija se rotacijom ravni $\varepsilon(\varepsilon_1\varepsilon_2)$ oko prvog traga ravni ε_1 dok se ne poklopi sa ravni horizontalnice, *sl. 1.124*.

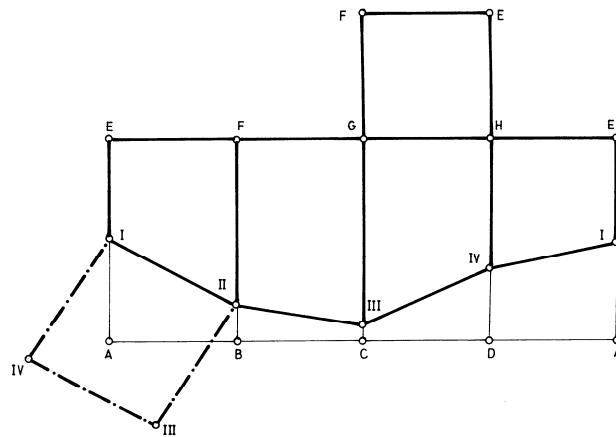
Položaj bazisa prizme koji leži u horizontalnici, i ivica prizme koje su paralelne sa vertikalnicom, ukazuju da je prava veličina bazisa ustvari prva projekcija A'B'C'D', a prave veličine ivica, s obzirom da su one međusobno jednake i paralelne sa vertikalnicom, očitavaju se u drugoj projekciji, odnosno $AE=A"E$, $BF=B"F$, $CG=C"G$, $DH=D"H$



Sl. 1.124. Konstrukcija preseka normalne prizme

• Mreža normalne prizme iznad preseka

Bazis prizme koji nastaje normalnim presekom, razvija se uvek kao prava normalna na ivice. Presek se crta kao izlomljena linija. Za crtanje prave veličine omotača, u našem slučaju, to je pravougaonik sastavljen od četiri manja pravougaonika, koristi se prava veličina bočne ivice (veličinu prenosimo iz druge projekcije, jer je $A''E''=AE$) i prave veličine bazisa (koristimo prvu projekciju). Konstrukciju mreže, *sl. 1.125*, treba započeti



Sl. 1.125. Konstrukcija mreže normalne prizme

crtanjem jedne prave na kojoj se od tačke A nanose, šestarom, prave veličine strane bazisa A'B', B'C', C'D' i D'A'. Iz tačaka A, B, C, D i A povlače se prave veličine ivica AE, BF, CG i DH koje se pokazuju u drugoj projekciji u pravoj veličini. Na ovaj način su dobijene tačke gornjeg bazisa i gornja linija omotača. Linija preseka dobija se tako što se na odgovarajućim ivicama nacrtanog omotača nanose prave veličine odstojanja tačaka A"-I", B"-II", C"-III" i D"-IV" Mreža prizme je potpuno nacrtana konstrukcijom prave veličine bazisa i stvarne veličine preseka, koje konstrukcijski prenosimo sa *sl. 1.125*. Zadati deo mreže, deo iznad preseka, nacrtan je punim debelim linijama.

1.10.3. Ravan presek i mreža kružnog konusa

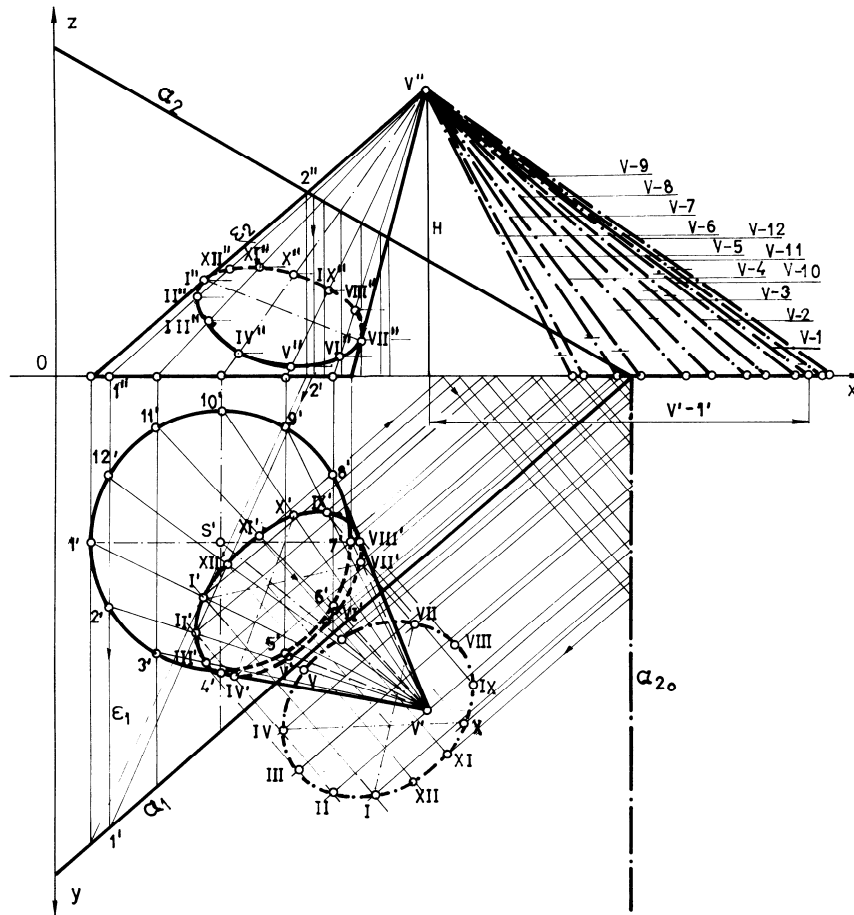
1.10.3.1. Presek kosog kružnog konusa i ravni $\alpha(\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z)$

Presek kosog kružnog konusa, čiji bazis leži u horizontalnici, sa proizvoljnom ravni $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ određujemo metodom direktnih prodora. Kako je proizvoljna ravan α postavljena koso prema konusu i projekcijskim ravnima, to će presek, a time i projekcije preseka biti elipse. Primenjujući postupak koji je prikazan u prethodnom poglavlju definiše se veći broj pomoćnih izvodnica. U datom primeru, *sl. 1.126*, našem slučaju bazis-krug je podeljen na dvanaest jednakih delova. Istim postupkom kako je rešavan presek piramida, odredi se i prodor svake definisane izvodnice konusa kroz datu ravan. S obzirom na broj podela kruga i simetričan raspored podeonih tačaka, može se pomoćna ravan ε , postaviti istovremeno kroz dve izvodnice. Pomoćna ravan $\varepsilon(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ stoji normalno na vertikalnici, i prolazi kroz vrh konusa V. Prvi trag ravni ε_1 preseca bazis u tačkama 2 i 12, odnosno 2' i 12' i u prvoj projekciji stoji normalno na x-osu, dok se drugi trag pomoćne ravni ε_2 poklapa sa drugom projekcijom izvodnica V"2" i V"12", *sl. 1.126*.

U preseku prve projekcije presečne prave p'-tačke 1'-2' i izvodnica u prvoj projekciji, V'2' i V'12' dobijaju se prve projekcije prodora II' i XII'. Povlačenjem projekcijskog zraka iz prve projekcije prodora II' do preseka sa V"2" dobijena je druga projekcija prodora II" ravni α i pomoćne izvodnice V - 2. Ponavljanjem gore opisanog postupka i za ostale izvodnice, određuju se obe projekcije prodora.

Prava veličina preseka određuje se u oborenoj ravni $(\alpha_1 \alpha_{20})$, *sl. 1.126*, postupkom rotiranih sutažnica, kako je to već ranije objašnjeno.

Stvarna veličina bazisa kružnog konusa je krug u prvoj projekciji, jer bazis konusa leži u horizontalnici.



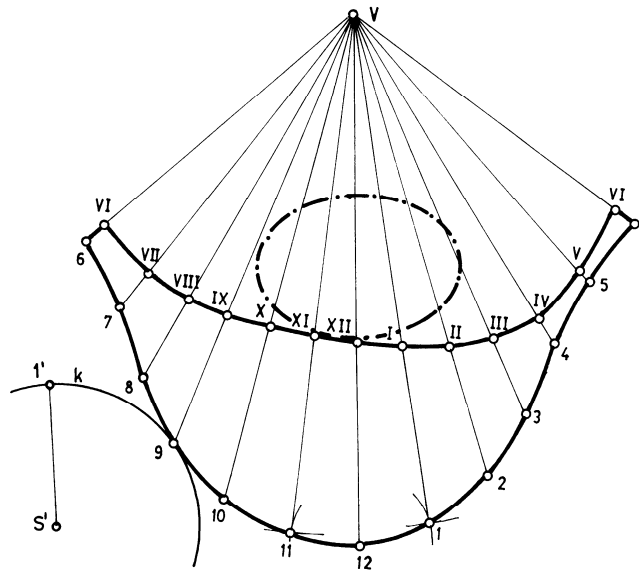
Sl. 1.126. Konstrukcija preseka kosog kružnog konusa

Kako je kosi kružni konus paralelan sa vertikalnicom, to će se konturne izvodnice u drugoj projekciji $V''-1''$ i $V''-7''$ videti u pravoj veličini. Prave veličine ostalih izvodnica konusa dobijene su metodom pravouglih trouglova.

- **Mreža kosog kružnog konusa ispod ravni**

Konstrukciju mreže kosog kružnog konusa, *sl. 1.127.* se crta postupno. Crta se, najpre, prava veličina najveće izvodnice $V-12=V'-12'$. Iz tačke 12, sa obe strane, pomoću šestara, se opiše luk $1'-2'$, a iz tačke V otvorom šestara lukovi poluprečnika V-11 i V-1. U preseku lukova dobijaju se tačke 1 i 11. Za dobijanje ostalih tačaka i izvodnica koristi se isti postupak. Dobijene tačke spajaju se međusobno krivoljarem čime se

kompensira greška nastala razlikom između lučne dužine tačaka 1-2, 2-3 ... i odgovarajućih dužina tetiva.



Sl. 1.127. Konstrukcija mreže kosog kružnog konusa

Nanošenjem i spajanjem pravih rastojanja 1-I, 2-II, 3-III itd. na prave izvodnice mreže dobija se linija preseka, tj. mreža omotača konusa ispod preseka. I konačno, na liniji preseka ucrtava se prava veličina preseka - elipsa, pomoću jedne od proučenih metoda, čime je potpuno definisana mreža kružnog konusa između horizontalnice i presečne ravni α .

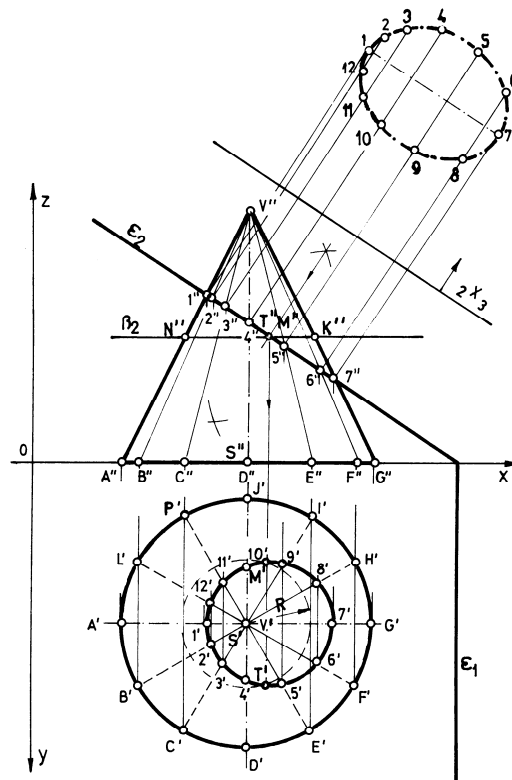
Mreža kosog kružnog konusa ispod preseka naglašena je na crtežu punim debelim linijama.

1.10.3.2. Presek normalnog kružnog konusa i ravni $\varepsilon(\varepsilon_x; \infty; \varepsilon_z)$

Presečna ravan ε , sl. 1.128. je u specijalnom položaju jer stoji normalno na verikalnici, a sa horizontalnicom zaklapa ugao, koji je manji od ugla što ga zaklapa konturna izvodnica sa bazisom konusa. Za konstrukciju preseka, potrebno je pored dve osnovne konturne ivice, usvojiti i dovoljan broj pomoćnih izvodnica, u našem slučaju bazis je podeljen na 12 jednakih delova, pomoću kojih su određene projekcije preseka. Presek u drugoj projekciji (1"-7") dobija se direktno presekom drugog traga ravni ε_2 i izvodnica. Povlačenjem projekcijskih zraka iz druge projekcije preseka na odgovarajuće izvodnice u prvoj projekciji dobijena je prva projekcija

prodora. Tako na primer, iz I'' povlačenjem projekcijskog zraka do preseka sa izvodnicom $A'V'$ određuje se prodor I' .

Veliki prečnik presečne elipse očitavamo se iz druge projekcije kao duž $1''-7''$ i on u ovoj projekciji predstavlja pravu veličinu. Manji prečnik elipse se nalazi na polovini duži $1''-7''$ i u drugoj projekciji se vidi kao tačka T'' odnosno M'' . Manji prečnik elipse u prvoj projekciji ($T'M'$) određuje se pomoću nove pomoćne ravni β . Ravan β se postavlja kroz tačke T'' i M'' paralelno sa horizontalnicom. U preseku ravni β i konturnih izvodnica kružnog konusa dobijaju se tačke kruga N'' i K'' . Presecanjem iz T'' i M'' u prvoj projekciji ovog kruga opisanog iz tačke V' definišu se prve projekcije tačaka T' i M' odnosno prava veličina manjeg prečnika elipse.



Sl. 1.128. Konstrukcija preseka normalnog kružnog konusa

Delenjem bazičnog kruga na 12 jednakih delova dobija se isto toliki broj izvodnica. Prava veličina konturnih izvodnica $VA = VG$ prikazuje se u drugoj projekciji, $VA = V''A''$, jer su iste paralelne sa vertikalnicom. Prave veličine ostalih izvodnica: $VB, VC, VD, VE, VF, VG, VH, VI, VJ, VP$ i VL određene su rotacijom svake izvodnice do položaja paralelnog sa vertikalnicom. Sve rotirane izvodnice poklapaju se u drugoj projekciji sa

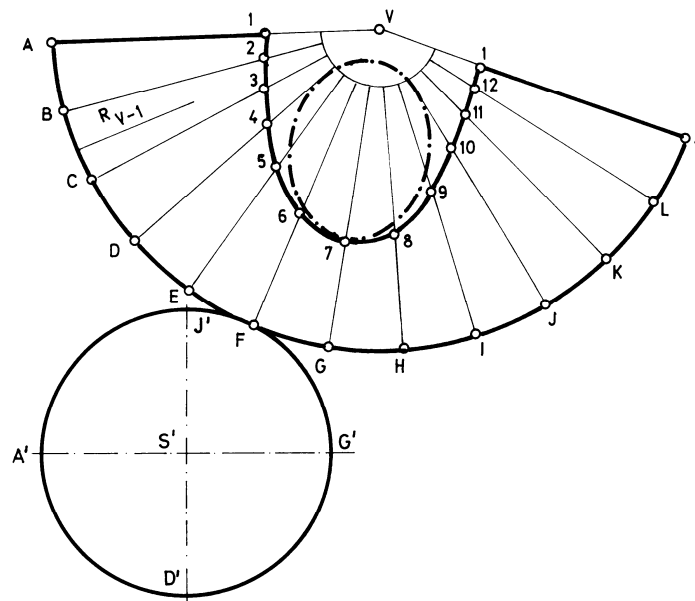
konturnim izvodnicama V"-A" i V"-G". Pravi položaj prodornih tačaka (tačke od 1 do 12), dobija se se iz druge projekcije prodora povlačenjem paralelnih pravaca sa x-osom do odgovarajuće izvodnice. Pravu veličinu i oblik bazisa vidimo u prvoj projekciji, jer isti leži u horizontalnici. Prava veličina preseka određena je postupkom transformacije u ravni αX_3 , sl. 1.128.

- **Mreža normalnog kružnog konusa ispod preseka**

Konstrukcija mreže normalnog kružnog konusa, sl. 1.129. treba započeti crtanjem kružnog luka čiji poluprečnik predstavlja pravu veličinu konturne izvodnice VG (otvor šestara V"G") na proizvoljno izbran pravac. Dužina kružnog luka mora odgovarati obimu bazisa, a delenje luka treba izvršiti na paran broj jednakih delova (tačke A-L). Međusobnim spajanjem vrha V sa podeonim tačkama (A-L) definisane su izvodnice mreže omotača.

Stvarni položaj tačaka 1-12 dobija se nanošenjem stvarnih dužina izvodnica do prodornih tačaka na svaku izvodnicu mreže, A-1 do L-12. Međusobnim spajanjem tačaka prodora, krivuljarem, konstruiše se kriva linija 1-12, tzv. linija preseka.

Mreža kružnog konusa ispod preseka kompletira se uvek ucrtavanjem preseka i bazisa u pravoj veličini.

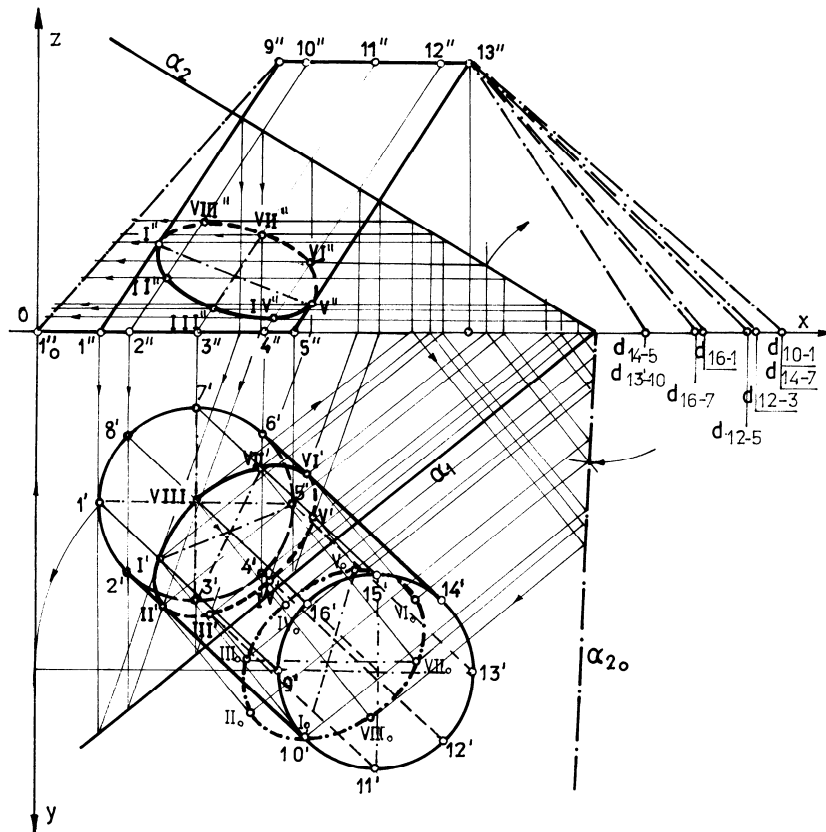


Sl. 1.129. Konstrukcija mreže normalnog kružnog konusa

1.10.4. Ravan presek i mreža kružne oblice

1.10.4.1. Presek kose kružne oblice i ravni $\alpha(\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z)$

Postupak određivanja preseka ravni i kružne oblice je identičan sa postupkom određivanja preseka prizme i ravni. Presek ravni i oblice može biti krug, elipsa, pravougaonik ili kvadrat. Predmet izučavanja biće oblice I reda čiji je bazis kružnica. Kod ovih oblica, presek sa ravni paralelan bazisu je kružnica podudarna sa bazisom, bez obzira da li je normalna ili kosa oblica



Sl. 1.130. Konstrukcija preseka kose kružne oblice

Presek kose kružne oblice i proizvoljne ravni, sl. 1.130. određuje se metodom prodora izvodnica kružne oblice kroz datu ravan α .

Kružna oblica je u projekcijama definisana sa dve konturne izvodnoce (1-9 i 5-13). Da bi odredili presek kose kružne oblice i proizvoljne ravni potrebno je, pored postojećih konturnih izvodnica, usvojiti nekoliko pomoćnih izvodnica pomoću kojih će biti definisane projekcije preseka.

Kako je ravan α koso postavljena prema oblici, a i prema projekcijskim ravnima, to će oblik preseka biti elipsa. Za dobijanje što tačnije konstrukcije preseka neophodno je usvojiti što veći broj izvodnica. Pomoćne izvodnice su definisane tačkama na kružnim bazisima, koji su u našem slučaju podeljeni na 8 delova. Podelu kruga bazisa treba raditi prema uputstvu datom u tački 10.2. Nakon parne podele bazisa, usvajaju se i obeležavaju dva bazisna prečnika 1-5 i 3-7 od kojih je prečnik 1-5 paralelan x-osi, a 3-7 normalan na x-osu.

Po izvršenoj podeli kružnice postavlja se specijalna ravan kroz dve izvodnice 2 i 8, normalno na vertikalnicu, tako da se jednim presekom mogu odrediti prodorne tačke preseka (II i VIII) za obe izvodnice. Opisani postupak se ponavlja za svaku izvodnicu. Oblik preseka je elipsa, a prava veličina preseka je prikazana u oborenoj ravni (α_1, α_{20}) pomoću rotiranih sutažnica. Središte presečne elipse je afino središtu bazisne kružnice pa će i spregnuti prečnici I-V i III-VII koji prolaze kroz središte elipse biti afini prečnicima 1-5 i 3-7.

Trase preseka nisu crtane, već je svaka tačka preseka označena u svakoj projekciji kružićima i obeležena rimskim brojevima, čime je postignuta vidljivost postupka crtanja i rešenja.

Kako su oba bazisa kružne oblice paralelna sa horizontalnicom to su sve izvodnice oblice iste dužine. Prave veličine izvodnica ($1_0''-9''$) konstruisane su u drugoj projekciji rotiranjem izvodnice ($1'-9'$) oko vertikale kroz $9'$ do položaja $1_0'-9'$ kada je paralelna sa vertikalnicom. Rotirani položaj konturne izvodnice u drugoj projekciji, $1_0''-9''$, predstavlja prave veličine izvodnica.

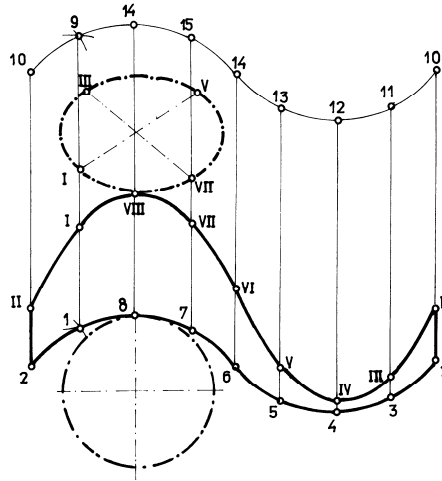
Stvarni položaj prodornih tačaka, od I do VIII, određuje se povlačenjem paralelnih pravaca sa x-osom od prodora u drugoj projekciji (tačke I'' do VIII'') do preseka sa pravom veličinom izvodnice ($1_0''-9''$).

● Mreža kose kružne oblice ispod preseka

Omotač oblice je paralelogram sastavljen, u našem slučaju, od osam manjih paralelograma, *sl. 1.131*. Za konstrukciju svakog paralelograma potrebno je odrediti i pravu veličinu dijagonala čije su prve projekcije: d'_{1-10} , d'_{3-10} , d'_{3-12} , d'_{5-12} , d'_{5-14} , d'_{7-14} , d'_{7-16} i d'_{1-16} .

Prava veličina ovih dijagonala određuje se postupkom pravouglog trougla, a na osnovu ranijeg objašnjenja. Mreža se postupno crta pomoću pravih veličina izvodnica, dijagonala i stvarne dužine tetiva uzetih sa bazisa u prvoj projekciji. Konstrukcija mreže se započinje opisivanjem luka poluprečnika d'_{1-10} , iz tačke 10, na već nacrtanoj konturnoj izvodnici 2-10 i luka poluprečnika $1'-2'$ iz tačke 2. U preseku ovih lukova dobijamo tačku 1. Iz tačke 1 povlači se izvodnica 1-9 paralelno sa izvodnicom 2-10

do preseka sa lukom poluprečnika 1'-2' opisanim iz tačke 10. U preseku izvodnice i luka dobijena je tačka 9. Na ovaj način je konstruisan prvi paralelogram 2-1-9-10. Istim postupkom konstruišu se i ostali paralelogrami do dobijanja pravog oblika i veličine omotača kose kružne oblice.



Sl. 1.131. Konstrukcija mreže kose kružne oblice

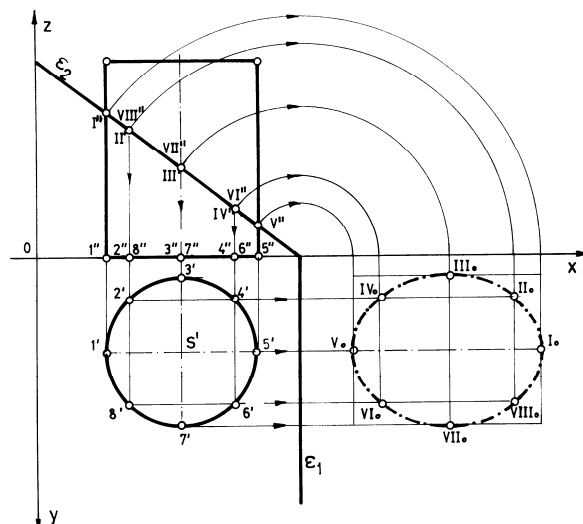
Nanošenjem stvarnih položaja prodornih tačaka na izvodnice, a zatim međusobnim spajanjem ovih tačaka, krivuljarem, određuje se linija preseka II-II. Mreža kose kružne oblice, između horizontalnice i presečne ravni, nacrtana je punim debelim linijama.

1.10.4.2. Presek normalne kružne oblice i ravni $\varepsilon(\varepsilon_x; \infty; \varepsilon_z)$

Presečna ravan ε , sl. 1.132. je specijalna ravan, jer je normalna na vertikalnicu, a sa horizontalnicom zaklapa neki ugao. Oblik preseka je elipsa, koja se u prvoj projekciji poklapa sa krugom bazisa, a u drugoj projekciji vidi se kao duž I"-V". Bazis normalne kružne oblice leži u horizontalnici, a osa i izvodnice su paralelne sa vertikalnicom. Bazis se u prvoj projekciji prikazuje u pravoj veličini, a stvarna veličina izvodnica se očitava u drugoj projekciji.

Prava veličina preseka dobija se rotacijom presečne ravni ε oko prvog traga ravni ε_1 u ravan horizontalnice. Duž I"-V" predstavlja pravu veličinu velikog prečnika elipse (I"-V"=I_o-V_o), a stvarna veličina malog prečnika elipse je prikazana u prvoj projekciji (duž 3'-7') i odgovara prečniku bazisa sl. 1.132.

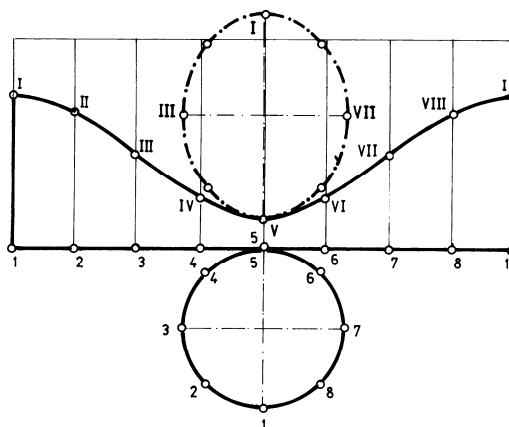
Izvodnice kružne oblice su iste dužine, a u drugoj projekciji su prikazane u pravoj veličini. Presečne tačke izvodnica, tačke od I do VIII, u drugoj



Sl. 1.132. Konstrukcija preseka normalne kružne oblice

projekciji su na pravim mestima, pa su i njihova udaljenja od horizontalnice (1''-I'', 2''-II'', 3''-III'', 4''-IV'', 5''-V'', 6''-VI'', 7''-VII'' i 8''-VIII'') stvarne veličine.

• **Mreža normalne kružne oblice ispod preseka**



Sl. 1.133. Konstrukcija mreže normalne kružne oblice

Na sl. 1.133. prikazan je postupak konstruisanja mreže, normalne kružne oblice, između presečne ravni i horizontalnice. Princip konstruisanja mreže normalne kružne oblice je kao i kod normalne prizme. Konstrukcija mreže omotača oblice treba započeti crtanjem stranice paralelograma koja iznosi $O=\pi D$. Dužina πD se podeli na osam jednakih

delova, na koliko delova je i bazis podeljen. (Približno tačna dužina omotača bazisa može se odrediti i na drugi način: tako što se na proizvoljnu pravu p nanosi osam lučna rastojanja $1'-2'$). Nanošenjem pravih položaja prodora na odgovarajuće izvodnice, dobija se linija preseka ravni i omotača (I-I), a zatim se na razvijenu mrežu omotača ucrtava bazisni-krug i presek (elipsu u pravoj veličini), čime se potpuno definiše izgled mreže kružne oblice ispod preseka.

ZADACI: 1.97. - 1.110.

- 1.97. Odrediti pravu veličinu preseka kose četverostrane piramide ABCDV i ravni $\beta(80;\infty;45)$. Bazis piramide je kvadrat stranice $a[A(20;25;?), B(45;10;?)]$ i leži u horizontalnici. Vrh piramide je u tački $V(70;15;50)$.
- 1.98. Odrediti projekcije preseka četverostrane piramide ABCDV sa ravni β i pravu veličinu preseka. $A(10;30;0)$, $B(20;5;0)$, $C(45;15;0)$, $D(35;35;0)$, $V(25;20;40)$, $\beta(90;65;25)$.
- 1.99. Bazis kose trostrane piramide je definisan tačkama $A(55;20;0)$, $B(10;40;0)$ i $C(25;5;0)$, a vrh tačkom $V(70;45;50)$. Piramida je presečena specijalnom ravni $\beta(80;\infty;50)$. Odrediti presek i mrežu piramide iznad preseka.
- 1.100. Data je kosa piramida sa bazisom određenim tačkama $A(10;10;0)$, $B(25;30;0)$, $C(45;15;0)$, $D(30;0;0)$. Vrh piramide je određen tačkom $V(50;40;40)$. Metodom direktnih prodora i kolineacije odrediti presek piramide i ravni $\beta(90;65;45)$.
- 1.101. Osnova kose trostrane prizme je trougao ABC [$A(0;15;0)$, $B(30;10;0)$, $C(20;30;0)$]. Bočne ivice su paralelne sa vertikalnicom. Teme D gornjeg bazisa, određeno je koordinatama $D(30;50;40)$. Odrediti pravu veličinu preseka prizme sa ravni $\beta(60;\infty;40)$.
- 1.102. Četvorougao ABCD je osnova, a AE bočna ivica kose prizme. Odrediti presek prizme i ravni $\beta(70;\infty;30)$ i nacrtati mrežu prizme ispod preseka. $A(10;15;0)$, $B(30;10;0)$, $C(35;25;0)$, $D(20;30;0)$, $E(40;30;30)$.
- 1.103. Normalna trostrana prizma visine 40mm leži svojim bazisom u horizontalnici. Bazis je definisan tačkama: $A(10;20;?)$, $B(45;15;?)$ i $C(30;5;?)$. Odrediti projekcije preseka prizme i ravni $\beta(55;\infty;30)$ i naći pravu veličinu preseka.

1.106

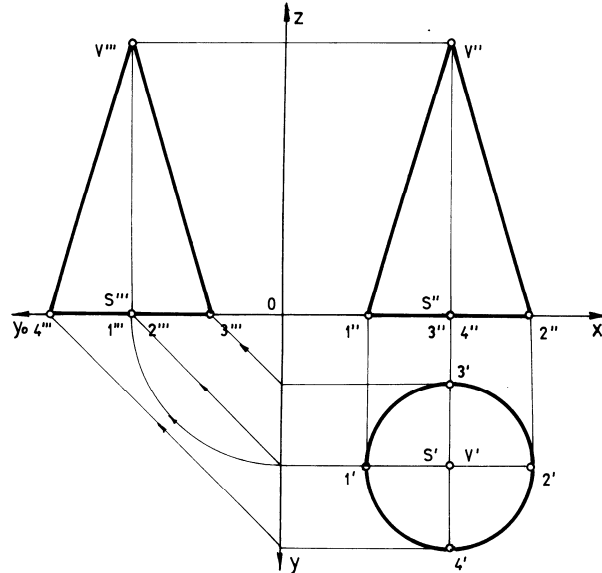
- 1.104. Šestostrana normalna piramida definisana je tačkom $S(50;28;75)$. Bazis piramide je pravilan šestougaonik otvora ključa OK 50mm koji je udaljen od H 6mm, a upravan je na V. Nacrtati mrežu dela piramide ispod preseka sa proizvoljnom ravni $\beta(190;80;65)$.
- 1.105. Nacrtati mrežu kružnog konusa ispod preseka sa ravni $\beta(85;90;45)$. Bazis konusa prečnika 35mm leži u horizontalnici. Visina konusa je 35mm, a centar bazisa je određen tačkom $S(35;25;?)$.
- 1.106. Nacrtati omotač normalnog konusa ispod preseka sa ravni $\beta(60;\infty;45)$. Bazis konusa prečnika 30mm leži u horizontalnici. Visina konusa je 45mm, a centar bazisa je određen tačkom $S(25;20;?)$.
- 1.107. Kosi kružni konus, čiji je bazis prečnika 30mm i tačka središta, $S(20;20;?)$ leži u horizontalnici. Vrh konusa je definisan tačkom $V(50;45;50)$. Konus je presečen specijalnom ravni $\beta(60;\infty;30)$. Nacrtati omotač zarubljenog dela konusa.
- 1.108. Normalna kružna oblica čiji je bazis prečnika 30mm, a tačka središta donjeg bazisa $S(30;20;?)$ leži u horizontalnici. Visina oblice je 40mm. Kružna oblica je presečena sa ravni $\beta(60;\infty;30)$. Nacrtati mrežu oblice iznad preseka.
- 1.109. Bazis normalne kružne oblice, prečnika 30mm, leži u horizontalnici. Središte donjeg bazisa je definisano koordinatama $O(25;20;?)$. Visina kružne oblice je 45mm. Kružna oblica je presečena sa ravni $\beta(85;60;45)$. Odrediti mrežu oblice iznad preseka.
- 1.110. Duž $AB[A(15;15;?) \text{ i } B(30;5;?)]$ je stranica pravilnog petougaonika koji leži u horizontalnici i predstavlja donji bazis normalne prizme, visine 35mm. Odrediti pravu veličinu preseka i mrežu iznad preseka sa ravni $\beta(55;\infty;25)$.

LITERATURA

- [1] Anagnosti P., *Nacrtna geometrija*, Beograd, 1980.
- [2] Đurović V., *Nacrtna geometrija*, Beograd, 1962.
- [3] Đurđanović M., *Osnovi nacrtne geometrije sa rešenim zadacima*, Niš 1998.
- [4] Gagić Lj., *Nacrtna geometrija*, Beograd, 1989.
- [5] Jovičić M., *Nacrtna geometrija*, Beograd, 1961.
- [6] Niče V., *Deskriptivna geometrija*, Zagreb, 1963.
- [7] Sbutega V., *Nacrtna geometrija*, Beograd, 1976.

pravoj veličini, dok će se u drugoj, odnosno trećoj projekciji, videti kao duž.

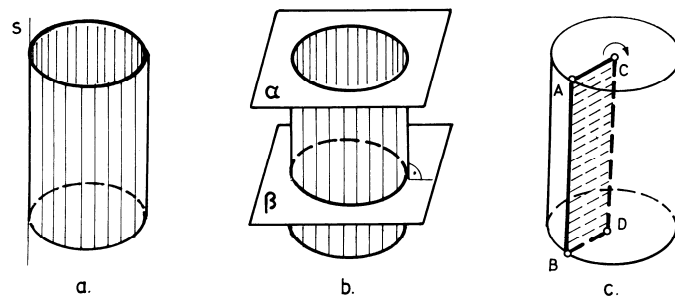
Na *sl. 1.113.* projeciran je normalan kružni konus sa bazisom koji leži u horizontalnici. Bazis se u prvoj projekciji vidi u pravoj veličini. U drugoj i trećoj projekciji bazis (kružnica) se projecira kao duž, a visina i konturna izvodnica vide se u pravoj veličini.



Sl. 1.113. Projeciranje normalnog kružnog konusa

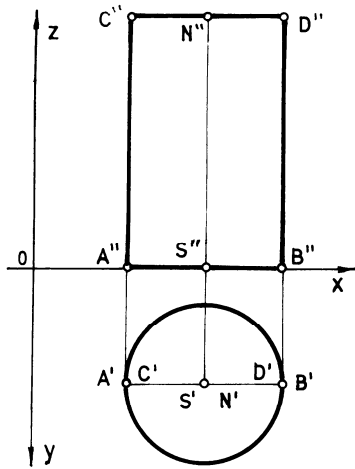
1.9.2.2. Kružne oblice

Udaljavanjem tačke S u beskonačnost, izvodnice s zauzimaju paralelan položaj, pa se dobija cilindrična površina, a vođenjem izvodnice s po kružnici, *sl. 1.114.a.*, nastaje kružna cilindrična površina. Presekom cilindrične kružne površine dvema paralelnim ravnima, normalnim na izvodnice, dobija se kružna oblica ili kružni cilindar, *sl. 1.114.b.*

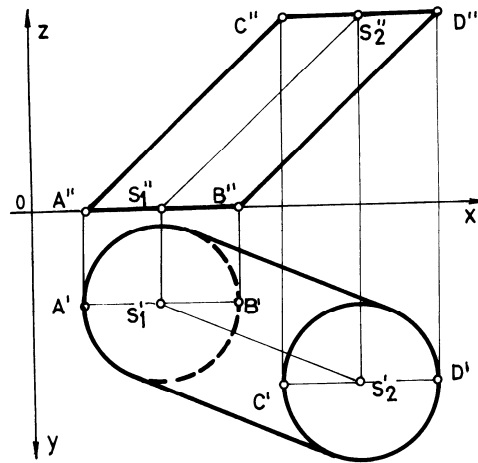


Sl. 1.114. Nastanak kružne oblice

Kružna oblica, *sl. 1.114.c.* može nastati i rotacijom pravougaonika ABCD oko stranice CD.



Sl. 1.115. Normalna kružna oblica

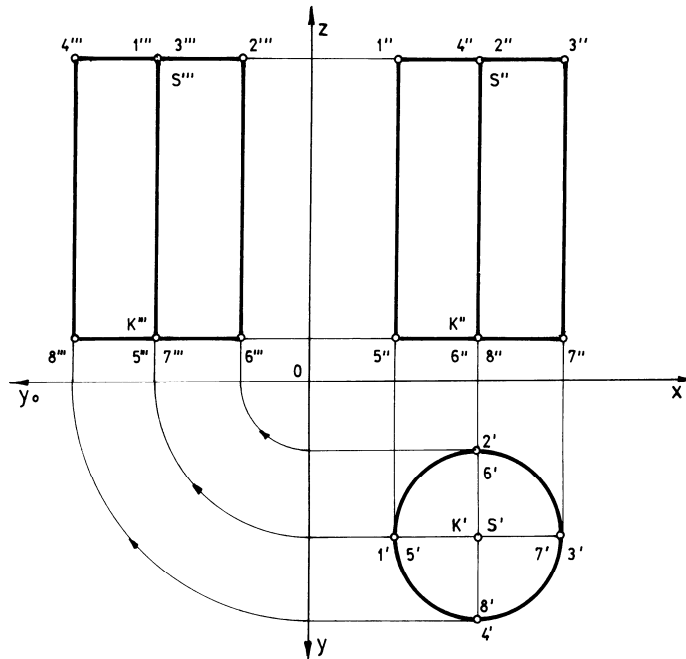


Sl. 1.116. Kosa kružna oblica

Zavisno od položaja izvodnica, prema bazisima, kružna oblica može biti normalna, *sl. 1.115.* i kosa, *sl. 1.116.* Kod normalne kružne oblice konturne izvodnice su iste veličine i stoje normalno na bazise, a kod kose, konturne izvodnice su paralelne, tj. jednake su po dužini i nisu normalne na bazise.

Karakteristične tačke kružne oblice, neophodne za projiciranje, su centar bazisa, četiri karakteristične tačke bazisa, dopunske tačke bazisa, konturne izvodnice i visina oblice. Ono što je rečeno o rasporedu karakterističnih i dopunskih tačaka kod kružnog konusa, važiće i za kružnu oblicu. Pri izboru položaja kružne oblice prema projekcijskim ravnima, prilikom projiciranja oblice, jedan bazis treba postavljati paralelno sa horizontalnicom ili da leži u njoj.

Na *sl. 1.117.* projicirana je normalna kružna oblica sa bazisom paralelnim sa horizontalnicom. Oba bazisa se u prvoj projekciji vide u pravoj veličini, a u drugoj i trećoj projekciji kao duži čije veličine odgovaraju stvarnom prečniku bazisa. Pravi položaj centra bazisa (S) se vidi u prvoj projekciji, a stvarna visina kružne oblice se očitava u drugoj i trećoj projekciji. Kako su kod normalne kružne oblice druga i treća projekcija iste, za njeno definisanje dovoljne su dve projekcije, prva i druga projekcija. O vidljivim i nevidljivim izvodnicama biće više objašnjenja u sledećoj tački.



Sl. 1.117. Projeciranje normalne kružne oblice

ZADACI: 1.73 - 1.84.

- 1.85 Nacrtati prvu i drugu projekciju kose trostrane piramide ABCV. $A(5;10;5)$, $B(20;30;5)$, $C(35;5;5)$, $V(45;25;30)$.
- 1.86 Bazis kose trostrane prizme ABC leži u horizontalnici i definisan je tačkama $A(0;25;?)$, $B(15;5;?)$, $C(35;20;?)$. Nacrtati obe projekcije prizme pod uslovom da teme D drugog bazisa ima koordinate $D(25;40;25)$.
- 1.87 Odrediti prvu i drugu projekciju kocke ABCDEFGH čija strana ABCD leži u horizontalnici. a[$A(0;20;?)$ i $B(20;5;?)$].
- 1.88 Nacrtati prvu i drugu projekciju normalne piramide ABCV ako je bazis piramide ABC paralelan sa horizontalnicom, a vrh je definisan tačkom $V(20;20;30)$. $A(0;10;10)$, $B(40;15;?)$, $C(15;40;?)$.
- 1.89 Nacrtati projekcije prave piramide ABCDEV čiji je bazis pravilan petougao ABCDE i leži u horizontalnici. Prečnik opisanog kruga bazisa i visina piramide iznose 30mm. Centar opisanog kruga bazisa, je definisan tačkom $O(25;30;0)$, dok je jedna ivica bazisa paralelna sa x-osom.

- 1.90 Bazis ABCD normalne četverostrane prizme leži u vertikalnici. Visina prizme iznosi $H=35\text{mm}$. Nacrtati obe projekcije zadate prizme. $A(15;?;10)$, $B(35;?;5)$, $C(45;?;15)$, $D(15;?;25)$.
- 1.91 Nacrtati projekcije kružnog konusa, bazisa prečnika 30mm. Bazis leži u horizontalnici, a vrh konusa je određen tačkom $V(20;20;30)$.
- 1.92 Bazis kosog kružnog konusa, sa središtem u $S(20;20;?)$, leži u prvoj projekcijskoj ravni. Poluprečnik kružnice iznosi 15mm, a vrh konusa je definisan tačkom $V(50;40;20)$. Nacrtati obe projekcije kosog kružnog konusa.
- 1.93 Nacrtati projekcije normalne kružne oblice visine 20mm, čiji bazis prečnika 40mm leži u horizontalnici. Centar donjeg bazisa je određen tačkom $S(20;20;?)$.
- 1.94 U datu ravan $\beta(90;40;40)$, ucrtati kvadrat stranice 20mm tako da dijagonala kvadrata BD bude normalna na prvi trag ravni. Težište kvadrata je definisano tačkom $T(25;15;?)$.
- 1.95 Na ravni $\beta(105;65;55)$ ucrtati projekcije normalne četverostrane piramide, visine 35mm. Bazis piramide je kvadrat upisan u krug prečnika 30mm. Težište bazisa je definisano tačkom $S(30;?20)$. Dijagonala bazisa BD i prvi trag ravni β_1 zaklapaju ugao od 30° .
- 1.96 Nacrtati projekcije kružnog konusa, visine 45mm i prečnika 30mm, koji leži svojim bazisom u ravni $\gamma(105;55;60)$. Centar bazisa je definisan tačkom $S(25;20;?)$.