

**UNIVERZITET U NIŠU  
FAKULTET ZAŠTITE NA RADU**

**Slavka Mitić**

**M E H A N I K A**

**NIŠ, 2006**

Autor:  
Dr Slavka Mitić, van. prof.  
Univerzitet u Nišu  
Fakultet zaštite na radu

## **MEHANIKA**

Prvo izdanje, osnovni udžbenik

Recenzenti:

Dr Milivoje Stanković, red. prof., Građevinsko-arhitektonskog fakulteta, Niš  
Dr Dragan Cvetković, red. prof., Fakultet zaštite na radu, Niš  
Dr Miroljub Grozdanović, red.prof., Fakultet zaštite na radu, Niš

---

Odlukom Naučno-nastavnog veća Fakulteta zaštite na radu u Nišu, br.03-425/7 od 22.09.2006.godine, odobreno je štampanje rukopisa kao osnovni udžbenik. Sva prava zadržava autor. Nijedan deo ove publikacije nije moguće prevoditi ili umnožavati u bilo kom obliku bez autorove pisane dozvole.

---

Izdavač:  
Fakultet zaštite na radu  
Čarnojevića 10a, 18000 Niš

Za izdavača:  
Dekan Dr Dragan Spasić, red.profesor Fakulteta zaštite na radu

Predsednik komisije za izdavačku delatnost:  
Dr Marina Mitić, red. prof. Fakulteta zaštite na radu

Kompjuterska obrada:  
Mitić Ivan, dipl.inž.el.  
Mitić Nenad, dipl.inž.el.

**ISBN 86-80261-68-8**

Štampa: Štamparija „SVEN“-Niš, tiraž: 300 primeraka

CIP-Katalogizacija u publikaciji  
Narodna biblioteka Srbije, Beograd

531(075.8)

**МИТИЋ, Славка**

Mehanika / Slavka Mitić.- 1. izd. –  
Niš : Fakultet zaštite na radu, 2006 (Niš  
: Sven) . - 250 str. : graf. prikazi ; 30cm  
Na vrhu nasl. str. : Univerzitet u Nišu. –  
Autorova slika. - Tiraž 300. – Bibliografija  
autora: str. 250. – Biografija: str.  
241. – Registri.

ISBN 86-80261-68-8

a) Механика  
COBISS.SR-ID 134440716

# SADRŽAJ

## UVOD

<b>1. STATIKA</b>	<b>5</b>
<b>1.1. OSNOVNI POJMOVI I AKSIOMI STATIKE</b>	<b>7</b>
1.1.1. Prvi aksiom (A1)-princip inercije. Pojam sile	8
1.1.2. Drugi aksiom (A2)-Ravnoteža dweju sila	8
1.1.3. Sistem sila. Pojam rezultante sistema sila	9
1.1.4. Treći aksiom (A3)-Dodavanje i uklanjanje uravnoteženog sistema	10
1.1.5. Teorema o pomeranju sile	10
1.1.6. Četvrti aksiom (A4)-Rezultanta dweju sila	11
1.1.7. Peti aksiom (A5)-Sile veza	12
1.1.8. Šesti aksiom (A6)-Princip jednakosti akcije i reakcije	13
<b>1.2. STATIKA U RAVNI</b>	<b>15</b>
1.2.1. Sistem sučeljnih sila u ravni	15
1.2.1.1. Rezultanta dweju sila u ravni	15
1.2.1.2. Rezultanta komplarnog sistema sučeljnih sila	16
1.2.1.3. Uslov ravnoteže komplarnog sistema sučeljnih sila	17
1.2.1.4. Analitički način definisanja sile. Projekcije i komponente sile	18
1.2.1.5. Analitički način određivanja rezultante sučeljnog sistema sila u ravni	19
1.2.1.6. Jednačine ravnoteže komplarnog sistema sučeljnih sila	22
1.2.1.7. Teorema o ravnoteži sistema tri sile u ravni	22
1.2.2. Moment sile za tačku	23
1.2.2.1. Definicija momenta sile za tačku	23
1.2.2.2. Varinjonova teorema za moment rezultante dweju sila	24
1.2.2.3. Varinjonova teorema za moment rezultante sistema sučeljnih sila	26
1.2.3. Paralelne sile u ravni. Spreg sila	27
1.2.3.1. Rezultanta dweju paralelnih sila istog smera	27
1.2.3.2. Rezultanta dweju paralelnih sila suprotnog smera	28
1.2.3.3. Definicija srega sila	29
1.2.3.4. Teorema o momentu sprega sila	30
1.2.3.5. Teorema o ekvivalentnosti spregova sila	31
1.2.3.6. Teorema o slaganju spregova sila	32
1.2.3.7. Uslov ravnoteže sistema spregova sila	33
1.2.4. Sistem proizvoljnih sila u ravni	34
1.2.4.1. Teorema o redukciji jedne sile na datu tačku	34
1.2.4.2. Definicije glavnog vektora i glavnog momenta	35
1.2.4.3. Teorema o redukciji sistema proizvoljnih sila u ravni na datu tačku	35
1.2.4.4. Slučajevi redukcije sistema proizvoljnih sila u ravni	37
1.2.4.5. Jednačine ravnoteže sistema proizvoljnih sila u ravni	38
1.2.4.6. Ravnoteža sistema paralelnih sila u ravni	39
1.2.4.7. Stabilnost ravnotežnog stanja krutog tela	40
1.2.4.8. Ravnoteža sistema krutih tela	41
<b>1.3. STATIKA U PROSTORU</b>	<b>43</b>
1.3.1. Sistem sučeljnih sila u prostoru	43
1.3.1.1. Rezultanta sistema od tri sučeljne sile u prostoru. Pravilo paralelopipeda sila	43
1.3.1.2. Rezultanta sistema sučeljnih sila u prostoru	44
1.3.1.3. Razlaganje sile na pravce koordinatnih osa Dekartovog koordinatnog sistema u prostoru. Projekcije sile na koordinatne ose	44

1.3.1.4.	Analitički način određivanja rezultante sučelnog sistema sila	46
1.3.1.5.	Rezultanta sistema sučelnih sila u prostoru	47
1.3.1.6.	Jednačine ravnoteže sistema sučelnih sila u prostoru	48
1.3.2.	Momenti sile	48
1.3.2.1.	Vektor momenta sile za tačku	48
1.3.2.2.	Moment sile za osu	50
1.3.2.3.	Zavisnost između momenta sile za osu i momenta sile za tačku	51
1.3.3.	Sistem spregova sila u prostoru	52
1.3.3.1.	Vektor momenta sprega sila	52
1.3.3.2.	Teorema o ekvivalentnosti spregova sila u prostoru	52
1.3.3.3.	Teorema o slaganju dva sprega sila u prostoru	53
1.3.3.4.	Teorema o salganju spregova sila u prostoru	55
1.3.3.5.	Uslov ravnoteže sistema spregova sila u prostoru	56
1.3.4.	Sistem proizvoljnih sila u prostoru	57
1.3.4.1.	Definicije glavnog vektora i glavnog momenta	57
1.3.4.2.	Teorema o redukciji proizvoljnog sistema sila na jednostavniji	58
1.3.4.3.	Slučajevi redukcije sistema proizvoljnih sila u prostoru	59
1.3.4.4.	Izrazi za glavni vektor i glavni moment u analitičkom obliku	60
1.3.4.5.	Analitički oblik uslova ravnoteže proizvoljnog sistema sila u prostoru	61
1.3.4.6.	Analitički oblik uslova ravnoteže sistema paralelnih sila u prostoru	62
1.3.4.7.	Varinjonova teorema o momentu rezultante za osu	62
1.4.	<b>TEŽIŠTE</b>	<b>65</b>
1.4.1.	Središte (centar) paralelnih sila. Koordinate središta paralelnih sila	65
1.4.2.	Težište krutog tela. Koordinate težišta krutog tela	66
1.4.3.	Koordinate težišta materijalne homogene zapremine	67
1.4.4.	Koordinate težišta materijalne homogene površine	69
1.4.5.	Koordinate težišta materijalne homogene linije	70
1.4.6.	Položaj težišta homogenih tela u specijalnim slučajevima	71
1.4.7.	Primeri određivanja položaja težišta	72
1.5.	<b>GRAFOSTATIKA</b>	<b>77</b>
1.5.1.	Konstrukcija osnovnih elemenata grafostatike	77
1.5.1.1.	Sistem sila se svodi na rezultantu	78
1.5.1.2.	Sistem sila se svodi na spreg sila	79
1.5.1.3.	Sistem sila je u ravnoteži	80
1.5.2.	Ravna rešetka	80
1.5.2.1.	Određjivanje reakcija oslonaca	81
1.5.2.2.	Određjivanje sila u štapovima rešetke	82
1.5.3.	Ravni puni nosači	86
1.5.3.1.	Određjivanje reakcija oslonaca	86
1.5.3.2.	Sile u preseku štapa (M, T i N)	86
1.5.3.3.	Diferencijalne zavisnosti između funkcija q, T i M	89

## 2. OTPORNOST MATERIJALA 91

2.1.	<b>OPŠTI POJMOVI</b>	<b>93</b>
2.1.1.	Osnovni pojmovi, pretpostavke i principi	93
2.1.2.	Definicija ukupnog napona	94
2.1.3.	Komponentni naponi	96
2.1.4.	Pojam male deformacije	98
2.1.5.	Vrste naprezanja	99
2.1.6.	Zadatak Otpornosti materijala	99
2.2.	<b>GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH PRESEKA</b>	<b>101</b>
2.2.1.	Statički momenti ravnih preseka	101
2.2.2.	Momenti inercije ravnih preseka	103
2.2.3.	Momenti inercije za paralelne ose-Štajnerova teorema	105
2.2.4.	Primeri izračunavanja momenata inercije i primena Štajner-ove teoreme	106



2.2.4.1.	Koordinate težišta i momenti inercije pravougaonika	106
2.2.4.2.	Težište trougla. Aksijalni momenti inercije za ose $X, \xi, X_1$	107
2.2.4.3.	Polarni moment inercije kružnog preseka	107
2.2.4.4.	Polarni moment inercije kružnog prstena	108
2.2.5.	Promena momenata inercije pri rotaciji koordinatnog sistema	108
2.2.6.	Glavni momenti inercije i pravci glavnih osa inercije	109
2.2.7.	Poluprečnik inercije	112
2.2.8.	Momenti inercije složenih ravnih preseka	112
<b>2.3.</b>	<b>AKSIJALNO NAPREZANJE</b>	<b>113</b>
2.3.1.	Osnovni pojmovi i pretpostavke	113
2.3.2.	Normalni napon u poprečnom preseku	113
2.3.3.	Naponsko stanje aksijalno napregnutog štapa	114
2.3.4.	Deformacija aksijalno napregnutog štapa	115
2.3.5.	Hukov zakon u slučaju aksijalnog naprezanja	116
2.3.6.	Aksijalno termičko naprezanje	116
<b>2.4.</b>	<b>RAVNO NAPREZANJE</b>	<b>117</b>
2.4.1.	Osnovni pojmovi i pretpostavke	117
2.4.2.	Stav o konjugovanosti tangencijalnih napona	117
2.4.3.	Naponi u kosom preseku	118
2.4.4.	Glavne ravni i glavni naponi	119
2.4.5.	Glavni naponi u opštem slučaju ravnog naprezanja	120
2.4.6.	Čisto smicanje. Pojam čistog smicanja	121
2.4.7.	Naponi kog čistog smicanja	121
2.4.8.	Deformacija usled čistog smicanja	122
<b>2.5.</b>	<b>UVIJANJE ŠTAPA KRUŽNOG POPREČNOG PRESEKA</b>	<b>125</b>
2.5.1.	Osnovni pojmovi i pretpostavke	125
2.5.2.	Deformacija usled uvijanja štapa kružnog poprečnog preseka	126
2.5.3.	Napon usled uvijanja štapa kružnog poprečnog preseka	127
2.5.3.1.	Veza između napona i klizanja	127
2.5.3.2.	Veza između napona i spoljašnjeg opterećenja	128
2.5.3.3.	Veza između ugla uvijanja i spoljašnjeg opterećenja	129
2.5.4.	Dimenzionisanje	130
2.5.4.1.	Dimenzionisanje štapa kružnog poprečnog preseka	130
2.5.4.2.	Dimenzionisanje štapa kružno-prstenastog poprečnog preseka	130
<b>2.6.</b>	<b>ČISTO SAVIJANJE</b>	<b>131</b>
2.6.1.	Osnovni pojmovi i pretpostavke	131
2.6.2.	Deformacija u slučaju čistog savijanja	132
2.6.3.	Glavne jednačine u slučaju čistog savijanja	134
<b>2.7.</b>	<b>POPREČNO SAVIJANJE</b>	<b>137</b>
2.7.1.	Osnovni pojmovi i pretpostavke	137
2.7.2.	Deformacija u slučaju poprečnog savijanja	137
2.7.3.	Normalni napon u slučaju čistog savijanja	138
2.7.4.	Tangencijalni napon u slučaju poprečnog savijanja	139
2.7.4.1.	Tangencijalni napon pravougaonog preseka	141
2.7.5.	Naponsko stanje	141
<b>2.8.</b>	<b>ELASTIČNA LINIJA</b>	<b>145</b>
2.8.1.	Diferencijalna jednačina elastične linije	145
2.8.2.	Integraljenje diferencijalne jednačine elastične linije	146
<b>2.9.</b>	<b>STATIČKI NEODREDJENE GREDE U SLUČAJU SAVIJANJA</b>	<b>152</b>
<b>2.10.</b>	<b>IZVIJANJE</b>	<b>153</b>
2.10.1.	Osnovni pojmovi i pretpostavke	153
2.10.2.	Izvođenje Ojlerovog obrasca za veličinu kritične sile izvijanja	153
2.10.3.	Osnovni slučajevi izvijanja	157
2.10.4.	Kritični napon izvijanja	158

### 3. KINEMATIKA

159

<b>3.1. OSNOVNI POJMOVI</b>	<b>161</b>
<b>3.2. KINEMATIKA TAČKE</b>	<b>162</b>
3.2.1. Položaj tačke u prostoru	162
3.2.2. Koordinatni sistemi. Koordinatne transformacije	162
3.2.2.1. Dekartov koordinatni sistem	163
3.2.2.2. Polarno-cilindrični koordinatni sistem	164
3.2.2.3. Sferni koordinatni sistem	165
3.2.2.4. Prirodni koordinatni sistem	165
3.2.3. Konačne jedn.kretanja u skalarnom obliku. Definicije putanje i zakona puta	166
3.2.4. Vrste kretanja tačke. Zakon puta	166
3.2.5. Vektor brzine tačke. Srednja brzina i trenutna brzina tačke	167
3.2.6. Brzina tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu	168
3.2.7. Vektor ubrzanja tačke. Srednje ubrzanje i trenutno ubrzanje tačke	169
3.2.8. Ubrzanje tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu	170
3.2.9. Brzina i ubrzanje tačke u prirodnom koordinatnom sistemu	171
3.2.10. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje	172
3.2.11. Neki posebni slučajevi kretanja tačke	173
3.2.11.1. Pravolinijsko kretanje tačke	173
3.2.11.2. Ravnomerno krivolinijsko kretanje tačke	173
3.2.11.3. Ravnomerno promenljivo krivolinijsko kretanje tačke	174
3.2.11.4. Kružno kretanje tačke	174
3.2.12. Brzina i ubrzanje tačke u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu	175
3.2.13. Brzina i ubrzanje tačke u sfernom koordinatnom sistemu	176
<b>3.3. KINEMATIKA KRUTOG TELA</b>	<b>177</b>
3.3.1. Određivanje položaja krutog tela. Broj stepeni slobode	177
3.3.2. Translatorno kretanje krutog tela	178
3.3.3. Obrtanje krutog tela oko nepokretne ose	179
3.3.3.1. Konačna jednačina obrtanja krutog tela oko nepokretne ose	179
3.3.3.2. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje kr.tela koje se obrće oko nepokretne ose	179
3.3.3.3. Brzina i ubrzanje tačke kr.tela pri obrtnom kretanju oko nepokretne ose	181
3.3.3.4. Vektorski postupak za određivanje vekt.brzine i vekt. ubrzanja	182
3.3.4. Ravno (ravansko) kretanje krutog tela	184
3.3.4.1. Osnovni pojmovi	184
3.3.4.2. Vektor brzine tačke krutog tela pri ravnom kretanju	186
3.3.4.3. Teorema o projekciji brzina dveju tačaka krutog tela pri ravnom kretanju	186
3.3.4.4. Određivanje brzina tačaka kr.tela pri r.kretanju metodom trenutnog pola	187
3.3.4.5. Vektor ubrzanja tačke krutog tela pri ravnom kretanju	189

### 4. DINAMIKA

191

<b>4.1. OSNOVNI POJMOVI</b>	<b>193</b>
<b>4.2. DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE</b>	<b>195</b>
4.2.1. Uvod	195
4.2.2. Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke	195
4.2.2.1. Diferencijalne jedn. kret. mat. tačke u Dekartovom koord. sistemu	196
4.2.2.2. Diferencijalne jedn. kret. mat. tačke u prirodnom koord. sistemu	196
4.2.3. Pravolinijsko kretanje mat. tačke pod dejstvom sile konstantnog intenziteta	196
4.2.3.1. Slobodan pad u bezvazdušnom prostoru	197
4.2.3.2. Vertikalni hitac uvis u bezvazdušnom prostoru	198
4.2.3.3. Pravolinijsko harmonijsko oscilovanje	199
4.2.4. Krivolinijsko kretanje u ravni	200
4.2.4.1. Kosi hitac u bezvazdušnom prostoru	201
4.2.4.2. Horizontalan hitac u bezvazdušnom prostoru	203
4.2.5. Opšti zakoni dinamike materijalne tačke	204

4.2.5.1.	Zakon o promeni količine kretanja	204
4.2.5.2.	Zakon o promeni momenta količine kretanja	206
4.2.5.3.	Rad sile. Kinetička energija (živa sila) i zakon o kinetičkoj energiji	207
4.2.5.4.	Konzervativne sile. Zakon o održanju mehaničke energije-integral energije	209
4.2.6.	Prinudno kretanje tačke	213
<b>4.3.</b>	<b>DINAMIKA SISTEMA MATERIJALNIH TAČAKA</b>	<b>215</b>
4.3.1.	Sile i geometrija masa sistema materijalnih tačaka	215
4.3.1.1.	Materijalni sistem. Spoljašnje i unutrašnje sile	215
4.3.1.2.	Središte masa (centar inercije) sistema materijalnih tačaka	216
4.3.1.3.	Momenti inercije sistema materijalnih tačaka	218
4.3.1.4.	Primeri izračunavanja momenata inercije nekih homogenih tela	219
4.3.1.5.	Zavisnost između momenata inercije	220
4.3.2.	Opšti zakoni dinamike sistema materijalnih tačaka	222
4.3.2.1.	Diferencijalne jednačine kretanja sistema materijalnih tačaka	222
4.3.2.2.	Zakon o kretanju središta masa sistema materijalnih tačaka	223
4.3.2.3.	Glavni vektor količina kretanja sistema. Zakon o promeni glavnog vektora	224
4.3.2.4.	Glavni moment količina kretanja sistema. Zakon o promeni glavn.momenta	226
4.3.2.5.	Kinetička energija sistema. Zakon o promeni kinetičke energije sistema	227
4.3.2.6.	Rad unutrašnjih sila sistema materijalnih tačaka	229
<b>4.4.</b>	<b>DINAMIKA KRUTOG TELA</b>	<b>231</b>
4.4.1.	Kinetička energija krutog tela. Rad spoljašnjih sila	231
4.4.2.	Diferencijalne jednačine kretanja krutog tela	232
4.4.2.1.	Diferencijalne jednačine translatornog kretanja krutog tela	232
4.4.2.2.	Diferencijalne jednačine obrtnog kretanja krutog tela oko nepokretne ose	233
4.4.2.3.	Diferencijalne jednačine ravnog kretanja krutog tela	234
4.4.2.4.	Zakon o promeni kinetičke energije krutog tela	235
<b>4.5.</b>	<b>OPŠTI PRINCIPI MEHANIKE</b>	<b>237</b>
4.5.1.	Diferencijalni principi	237
4.5.1.1.	Dalamberov princip	237
4.5.1.2.	Lagranžev princip	239
4.5.1.3.	Lagranž-Dalamberov princip	239

<b>LITERATURA</b>	<b>241</b>
<b>INDEKS OZNAKA</b>	<b>242</b>
<b>INDEKS POJMOVA</b>	<b>245</b>
<b>INDEKS IMENA</b>	<b>249</b>
<b>BIOGRAFIJA AUTORA</b>	<b>250</b>