

УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ФАКУЛТЕТ ЗАШТИТЕ НА РАДУ

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ
МАТЕМАТИКЕ

Ниш, 30. 6. 2021.

1. Извршити назначене операције са разломцима: $\frac{a^2b - 4b^3}{3ab^2} \cdot \frac{a^2b}{a^2 - 2ab}$.

Решење.

$$\begin{aligned} \frac{a^2b - 4b^3}{3ab^2} \cdot \frac{a^2b}{a^2 - 2ab} &= \frac{b(a^2 - 4b^2)}{3ab^2} \cdot \frac{a^2b}{a(a - 2b)} = \\ &= \frac{a^2b^2(a - 2b)(a + 2b)}{3a^2b^2(a - 2b)} = \frac{a + 2b}{3}. \end{aligned}$$

2. Решити систем једначина:
$$\begin{cases} x^2 + 2x - y - 3 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Решење. Из друге једначине добијамо да је $y = x + 3$, па прва једначина постаје:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - (x + 3) - 3 &= 0, \\ x^2 + 2x - x - 3 - 3 &= 0, \\ x^2 + x - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Сада решавамо квадратну једначину $x^2 + x - 6 = 0$:

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}; x_1 = \frac{-1 - 5}{2} = -3; x_2 = \frac{-1 + 5}{2} = 2.$$

Сада је $y_1 = x_1 + 3 = -3 + 3 = 0$ и $y_2 = x_2 + 3 = 2 + 3 = 5$. Решења система су: $(-3, 0)$ и $(2, 5)$.

3. Нека су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 - 5x + 6 = 0$. Не решавајући дату једначину, израчунати вредност израза $x_1^2 + x_2^2$.

Решење. $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Применом Вијетових веза не једначину $x^2 - 5x + 6 = 0$ налазимо да је $x_1 + x_2 = 5$ и $x_1x_2 = 6$. Сада је

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2 \cdot 6 = 25 - 12 = 13.$$

4. Користећи разлагање $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, израчунати $\cos 75^\circ$ и $\sin 75^\circ$.

Решење.

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1). \\ \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

5. Решити једначину: $\log_3(x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

Решење.

$$\log \frac{x+1}{x-1} = 1, \quad \frac{x+1}{x-1} = 3^1 = 3, \quad x+1 = 3(x-1), \quad x+1 = 3x-3, \\ 2x = 4, \quad x = 2.$$

Решење дате једначине је $x = 2$.