

Univerzitet u Nišu
Fakultet zaštite na radu

Dejan M. Petković

ELEKTROTEHNIKA

Rešeni zadaci
sa ispita, kolokvijuma i testova

Niš, 2017



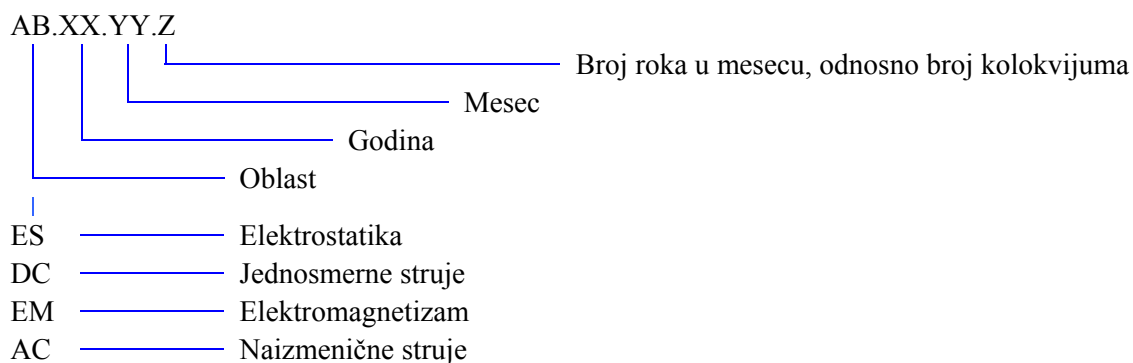
Ovoj tekst nastaje od rešenja zadataka koji su bili na ispitima, kolokvijumima ili testovima iz Elektrotehnike. Tekst stalno dopunjem, međutim izbor zadatka je, ako se izuzme aktuelnost, bez posebnog pravila. Ukoliko smatrate da rešenje nekog zadatka treba što pre da se nađe u ovoj zbirci, molim Vas pošaljite postavku problema na <mailto:dejan.petkovic@znrfak.ni.ac.rs>, a ja ću se potruditi da u što kraćem roku uvrstim rešenje u integralni tekst. Ukoliko Vam neko od rešenja nije dovoljno jasno (možda sam negde pogrešio), potražite pojašnjenje na <mailto:dejan.petkovic@znrfak.ni.rs>.

DMP

Datum prvog objavljivanja: ponedeljak, 18. april 2016.

Datum poslednje dopune: **petak, 21. april 2017**

Označavanje zadataka:



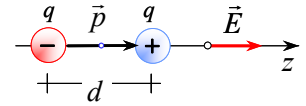
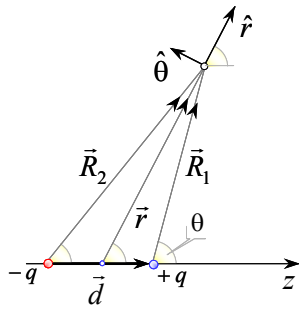
Primer

ES.15.10.3 — Elektrostatika, 2015, Oktobar 3.

Nemanja Bogdanović 11028 — 20.04.17. Uočene tri greške. Ispravljeno.

ES.16.10.1

Pokazati da električno polje u tačkama na osi električnog dipola, čiji je moment $\vec{p} = q\vec{d}$, na velikim rastojanjima od dipola $z \gg d$ opada sa trećim stepenom rastojanja z .

**Rešenje**Potencijal –
naelektrisanja

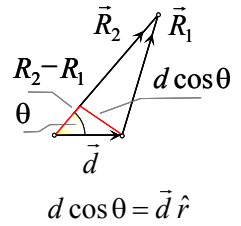
$$\triangleright \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\text{ili } \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Za
 $R_1, R_2 \gg d$

$$R_1 R_2 \approx r^2$$

$$R_2 - R_1 \approx d \cos \theta$$

 $\triangleleft$ Potencijal –
dipol
 $\vec{p} = q\vec{d}$

$$\triangleright \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

1

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

2

$$d \cos \theta = \vec{d} \cdot \hat{r}$$

Električno polje na osnovu **2**

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

 $\triangleleft$ Opšti oblik

$$\text{grad} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = (\vec{p} \cdot \vec{r}) \text{grad} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{r}) =$$

$$= -(\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{3}{r^5} + \frac{1}{r^3} \vec{p}$$

$$\triangleright \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

3 Opšti oblik
na osnovu **2**Električno polje na osnovu **1**

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

 $\triangleleft$ Sferne koordinate

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos \theta}{r^2} = -2 \frac{\cos \theta}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r^2}$$

$$\triangleright \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\theta} \right)$$

4 Opšti oblik
na osnovu **1**Za tačke na osi dipola koja se poklapa sa
sa z osom je:

$$\vec{r} = z \hat{z}, \quad \vec{p} = p \hat{z}$$

$$\triangleright \vec{E} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^3} \hat{z}$$

 $\triangleleft$ Na osnovu **3**Za tačke na osi dipola koja se poklapa sa
sa Z osom je:

$$\hat{r} = \hat{z}, \quad \theta = 0$$

$$\triangleright \vec{E} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^3} \hat{z}$$

 $\triangleleft$ Na osnovu **4**Za tačke na osi dipola koja se poklapa sa
sa Z osom je:

$$r = z, \quad \theta = 0$$

$$\triangleright \varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2}$$

5 Na osnovu **1**Električno polje na osnovu **5**

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z}$$

$$\triangleright \vec{E} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^3} \hat{z}$$

 $\triangleleft$ Na osnovu **5**Električno polje -
dva raznoimena naelektrisanja

$$\triangleright \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \hat{z}$$

6 Najjednostavniji
od 4 data načinaZa tačke na osi dipola koja se poklapa sa
sa z osom je:

$$R_1^2 = (z - d/2)^2, \quad R_2^2 = (z + d/2)^2$$

$$\triangleright \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(z - d/2)^2} - \frac{1}{(z + d/2)^2} \right) \hat{z}$$

Nakon izvršnog oduzimanja

u imeniocu se zanemaruje $\pm d/2$,

$$(z \pm d/2)^2 \approx z^2$$

$$\triangleright \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z^2 + zd + (d/2)^2 - z^2 + zd - (d/2)^2}{(z - d/2)^2 (z + d/2)^2} \hat{z}$$

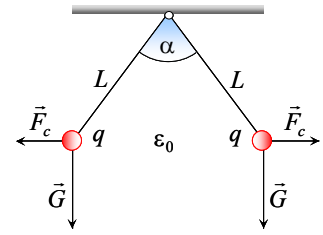
Električno polje na osnovu **6**

$$\triangleright \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2zd}{z^4} \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{z^3} \hat{z} \quad \triangleleft \quad p = qd$$

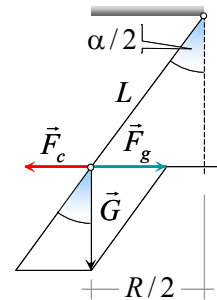
ES.15.10.3

Dve kuglice jednakih veličina i jednakih masa m obešene su u vazduhu o niti jednakih dužina L i zatim, dok su se dodirivale, naelektrisane su količinom naelektrisanja $2q$. Kuglice će se međusobno odbiti i niti će graditi ugao α .

- a) Odrediti količinu naelektrisanja na osnovu izmerenog ugla.
 ☺ Skicirati grafik funkcije $q(\alpha)$

**Rešenje**

Ravnoteža sistema	$\sum \vec{F} = 0$	$\triangleright F_c = F_g$
Tangencijalna komponenta gravitacione sile		$\triangleright F_g = G \tan(\alpha/2) = mg \tan(\alpha/2)$
Elektrostatička sila		$\triangleright F_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2}$
Rastojanje između naelektrisanja		$\triangleright R = 2L \sin(\alpha/2)$
	$F_c = F_g$	$\triangleright \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[2L \sin(\alpha/2)]^2} = mg \tan(\alpha/2)$
Količina naelektrisanja u funkciji izmerenog ugla		$\triangleright q = 4L\sqrt{\pi\epsilon_0 mg} \sin(\alpha/2)\sqrt{\tan(\alpha/2)}$



$$\tan(\alpha/2) = F_g / G$$

$$\sin(\alpha/2) = \frac{R/2}{L}$$

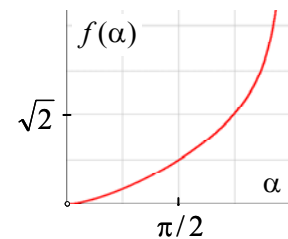
☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

Prikazan je deo grafika funkcije

$$q(\alpha) \sim \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\tan \frac{\alpha}{2}}$$

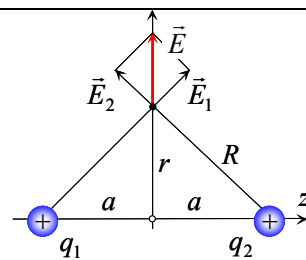
za $0 \leq \alpha < \pi$.

Inače, funkcija je periodična ali ostale periode nisu od interesa.



ES.16.01.1

Dva jednaka tačkasta naelektrisanja, $q_1 = q_2 = q$ nalaže se na međusobnom rastojanju $2a$. Jačina električnog polja je jednaka nuli na sredini duži koja spaja naelektrisanja ($r=0$, $z=0$) i u beskonačnosti. Prema Rolleovoj teoremi između takve dve tačke neprekidna funkcija ima ekstremnu vrednost. Odrediti položaj tačaka u kojoj električno polje ima ekstremnu vrednost.

**Rešenje**

Električno polje tačkastog naelektrisanja-

$$\triangleright E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2}$$

Problem je rotaciono simetričan oko z ose. U polarnom koordinatnom sistemu vektor polja ima radijalnu E_r i aksijalnu komponentu E_z .

$$\begin{aligned} E_r &= E \sin \alpha = E \frac{r}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \\ E_z &= E \cos \alpha = E \frac{a}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{R^3} \end{aligned}$$

U simetralnoj ravni $z=0$ aksijalne komponente se anuliraju. Radijalna komponenta ima dvostruku vrednost.

$$\begin{aligned} E_z &= 0 \\ E_r &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Jačina električnog polja zavisi samo od r koordinate.

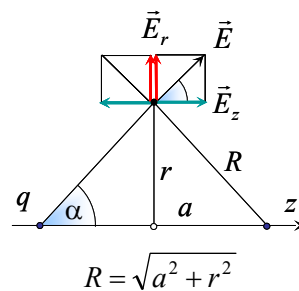
$$\triangleright \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \right] = 0$$

$\triangleleft$ U tački ekstremuma prvi izvod je nula.

$$\frac{(a^2 + r^2)^{3/2} - r \frac{3}{2} (a^2 + r^2)^{1/2} 2r}{(a^2 + r^2)^3} = 0$$

$$\triangleright a^2 - 2r^2 = 0 \quad \triangleright r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangleright E_{r_{\max}} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \frac{2}{3\sqrt{3}}$$



$$\sin \alpha = \frac{r}{R} = \frac{E_r}{E}$$

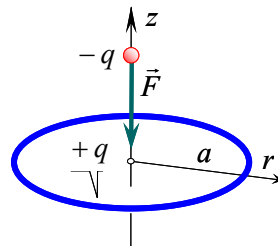
$$\cos \alpha = \frac{a}{R} = \frac{E_z}{E}$$

Električno polje ima najveću vrednost u tačkama koje leže u simetralnoj ravni $z=0$ i koje pripadaju kružnici poluprečnika $r = a\sqrt{2}/2$.

ES.16.10.1

Na osi obruća poluprečnika a , koji je naelektrisan količinom naelektrisanja $+q$, nalazi se tačkasto naelektrisanje $-q$.

- Odrediti silu kojom obruč deluje na naelektrisanje.
 - Odrediti rastojanje tačkastog naelektrisanja od centra obruća na kome sila ima ekstremnu vrednost.
- ☺ Skicirati grafik funkcije po kojoj se menja sila.

**Rešenje**

Električno polje elementarnog naelektrisanja

$$\triangleright dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Količina naelektrisanja

$$\triangleright dq = q' dl = q' a d\theta, \quad q' = q/(2a\pi)$$

U tačkama na osi polje ima samo z komponentu. Komponente polja u radialnom pravcu koje potiču od centralno simetričnih naelektrisanja se anuliraju.

$$\begin{aligned} dE_z &= dE \frac{z}{R} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^3} z \\ dE_z &= \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{a z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta \end{aligned}$$

Ukupno električno polje koje potiče od celog obruća

$$\triangleright E_z = \frac{q'a}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\triangleright \vec{E}_z = \frac{q'}{2\epsilon_0} \frac{a z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad \text{ili} \quad \vec{E}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{a^2 z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Sila između naelektrisanja i obruća srazmerna je jačini polja koje obruč stvara $\vec{F}_z = -q\vec{E}_z \hat{z}$

$$\triangleright \vec{F}_z = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{a^2 z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Izraz za silu može da se napiše u skraćebnom obliku. F_0 je fiktivna sila između dva tačkasta naelektrisanja na rastojanju koje je jednako poluprečniku obruća.

$$\triangleright \vec{F}_z = F_0 f(z) \hat{z}$$

Električno polje i sila su jednaki nuli u centru obruća, $z=0$ i u tačkama u beskonačnosti, $z \rightarrow \infty$

$$\triangleright \begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) &= 0 \end{aligned}$$

Prema Rolleovoj teoremi između dve nule, neprekidna funkcija ima ekstremnu vrednost.

$$\triangleright \frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \right] = 0$$

$\triangleleft$ U tački ekstremuma prvi izvod je nula.

$$\frac{(a^2 + z^2)^{3/2} - z \frac{3}{2} (a^2 + z^2)^{1/2} 2z}{(a^2 + z^2)^3} = 0$$

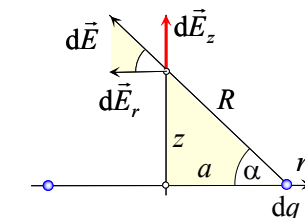
$$\triangleright a^2 - 2z^2 = 0 \quad \triangleright z = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangleright F_{z_{\max}} = F_0 \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

Prikazan je deo grafik funkcije $f(z) = \frac{a^2 z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z/a}{[1 + (z/a)^2]^{3/2}}$

Funkcija ne neparna. Znak funkcije pokazuje smer sile u odnosu na z osu., ali pri tome treba voditi računa da izraz za silu F_0 uključuje negativan znak. Sila je, međutim, uvek privlačna.



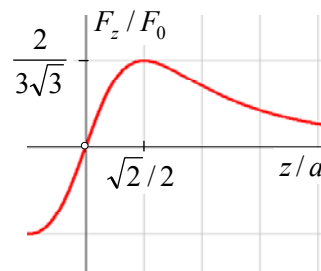
$$\triangleleft R = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$\triangleleft \sin \alpha = \frac{dE_z}{dE} = \frac{z}{R}$$

$$\triangleleft 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$\triangleleft$ Električno polje - kružni obruč

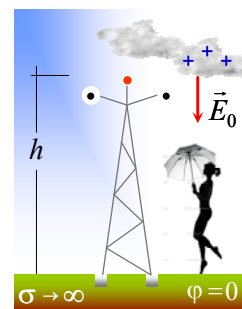
$\triangleleft$ Coulombova sila - naelektrisanje - obruč



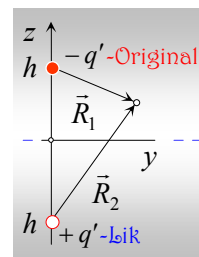
ES.15.10.3

Iznad dalekovoda montiran je uzemljeni provodnik (gromobransko užje). Provodnik poluprečnika a se nalazi na visini $h \gg a$ od savršeno provodne zemlje. Pod dejstvom homogenog atmosferskog električnog polja E_0 u provodniku se indukuju naelektrisanja koja smanjuju primarno polje. Odrediti:

- podužnu gustinu indukovanih naelektrisanja,
- električno polje u tačkama na osi sistema,
- slabljenje električnog polje u tački na osi sistema na polovini visine.

**Rešenje**

Potencijal električnog polja nastaje delovanjem primarnog polja i indukovanih naelektrisanja u užetu. Uricaj površine zemlje zameljuje se likom.

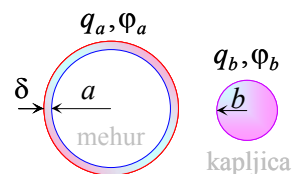


Jačina atmosferskog polja	$\triangleright$	$\vec{E}_0 = -E_0 \hat{z}$	
Potencijal atmosferskog polja	$\triangleright$	$\varphi_0 = E_0 z$	
Potencijal sistema original-lik	$\triangleright$	$\varphi_0 = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$	$\triangleleft R_1 = \sqrt{y^2 + (z-h)^2}$ $\triangleleft R_2 = \sqrt{y^2 + (z+h)^2}$
Potencijal celog sistema	1 $\triangleright$	$\varphi = E_0 z + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{y^2 + (z+h)^2}{y^2 + (z-h)^2}$	$\triangleleft y=0$ $z=h-a$ Tačka na površini provodnika
Provodnik je uzemljen, potencijal na površini je $\varphi=0$	$\triangleright$	$E_0(h-a) + \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h-a}{a} = 0$	$\triangleleft h \gg a$ $2h \gg a$ Realni odnosi
Iz uslova $\varphi=0$ može da se odredi q'	$\triangleright$	$E_0 h \approx -\frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln(2h/a)$	$\triangleleft$ uz gornje zanemarivanje
Indukovana naelektrisanja podužna gustina	$\triangleright$	$q' = -2\pi\epsilon_0 \frac{E_0 h}{\ln(2h/a)}$	$\triangleleft$ zameniti u 1
Potencijal sa određenim q' - konačan izraz dobijen iz 1	$\triangleright$	$\varphi = E_0 z - \frac{E_0 h}{2 \ln(2h/a)} \ln \frac{y^2 + (z+h)^2}{y^2 + (z-h)^2}$	
Električno polje - vertikalna komponenta, $\vec{E}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z}$	$\triangleright$	$E_z = -E_0 + \frac{E_0}{\ln(2h/a)} \frac{2h^2(y^2 - z^2 + h^2)}{[y^2 + (z+h)^2][y^2 + (z-h)^2]} \hat{z}$	
Električno polje - horizontalna komponenta, $\vec{E}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y}$	$\triangleright$	$\vec{E}_y = -\frac{E_0}{\ln(2h/a)} \frac{4hyz}{[y^2 + (z+h)^2][y^2 + (z-h)^2]} \hat{y}$	
Električno polje - na osi sistema, $y=0$	$\triangleright$	$E_y = 0, \quad E_z = -E_0 \left(1 - \frac{2}{\ln(2h/a)} \frac{1}{1 - (z/h)^2} \right)$	
Električno polje - u tački $y=0, z=h/2$	$\triangleright$	$\left \frac{E_z}{E_0} \right = 1 - \frac{8}{3 \ln(2h/a)}$	

ES.13.01.1

Mehur (od sapunice) poluprečnika a i debljine zida δ nalazi se na potencijalu φ_a . Odrediti potencijal φ_b na kome će se nalaziti kapljica koja se dobija kada se mehur rasprsne.

Numerički podaci: $\varphi_a = 1\text{ V}$, $a = 0.01\text{ m}$, $\delta = 3.3\text{ }\mu\text{m}$

**Rešenje**

Gaussov zakon –
primenjen na sferu

$$\triangleright \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \triangleright \quad E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad r \geq a$$

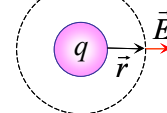
Električno polje –
sferno naelektrisanje

$$\triangleright \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Potencijal –
sferno naelektrisanje

$$\triangleright \quad \varphi = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} \quad \triangleright \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Gaussova površ



◁ Isto kao i za tačkasto
naelektrisanje smešteno
u centru sfere

☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedenih formula.

Potencijal –
mehur

$$\triangleright \quad \varphi_a = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad \triangleleft \quad q = q_a, \quad r = a$$

Potencijal –
kapljica

$$\triangleright \quad \varphi_b = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} \quad \triangleleft \quad q = q_b, \quad r = b$$

Količina naelektrisanja –
mehur

$$\triangleright \quad q_a = 4\pi\epsilon_0 a \varphi_a$$

Količina naelektrisanja –
kapljica

$$\triangleright \quad q_b = 4\pi\epsilon_0 a \varphi_a \quad \triangleright \quad q_b = q_a$$

◁ Količina naelektrisanja
se nije promenila

Potencijal –
kapljica

$$\triangleright \quad \varphi_b = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} = \frac{4\pi\epsilon_0 a \varphi_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}$$

Potencijal –
kapljica

$$\triangleright \quad \varphi_b = \frac{a}{b} \varphi_a \quad \mathbf{1}$$

Zapremina –
materijal mehura

$$\triangleright \quad V_a = \frac{4}{3}\pi(a + \delta)^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{4}{3}\pi(3a^2\delta + 3a\delta^2 + \delta^3)$$

Zapremina –
materijal mehur

$$\triangleright \quad V_a \approx 4\pi a^2 \delta$$

◁ Zanemareno δ^3 i δ^2 kao
male veličine višeg reda

Zapremina –
materijal kapljica

$$\triangleright \quad V_b = \frac{4}{3}\pi b^3$$

Zapremine su iste

$$\triangleright \quad V_a = V_b \quad \triangleright \quad 4\pi a^2 \delta = \frac{4}{3}\pi b^3$$

◁ Količina materijala
se nije promenila

Poluprečnik –
kapljica

$$\triangleright \quad b = \sqrt[3]{3a^2\delta} \quad \mathbf{2}$$

Numerički primer

$$\triangleright \quad a = 10\text{ mm} \\ b = 1\text{ mm}$$

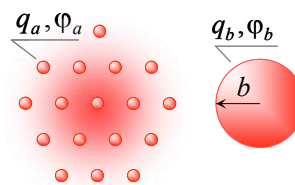
$$\triangleright \quad \varphi_a = 1\text{ V} \\ \varphi_b = 10\text{ V}$$

$$\odot \quad \left[\begin{array}{l} C_a = 1.11\text{ pF} \\ C_b = 0.11\text{ pF} \end{array} \right]$$

ES.12.01.1

Svaka od N kapljica (na primer, od žive) nalazi se na potencijalu φ_a .
 Odrediti potencijal φ_b na kome će se nalaziti kapljica koja se dobija kada se sve kapljice sakupe u jednu. Pretpostaviti da su sve kapljice sfernog oblika.

Numerički podaci: $\varphi_a = 1 \text{ V}$, $N = 8000$

**Rešenje**

Gaussov zakon –
 primenjen na sferu

$$\triangleright \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \triangleright \quad E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad r \geq a$$

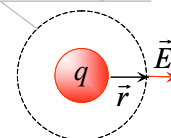
Električno polje –
 sferno naelektrisanje

$$\triangleright \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Potencijal –
 sferno naelektrisanje

$$\triangleright \quad \varphi = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} \quad \triangleright \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Gaussova površ



Isto kao i za tačkasto
 naelektrisanje smešteno
 u centru sfere

© Na ispitu se priznaje upotreba već izvedenih formula.

Potencijal –
 svake od N kaplica

$$\triangleright \quad \varphi_a = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

Količina naelektrisanja
 na svakoj od N kapljica

$$\triangleright \quad q_a = 4\pi\epsilon_0 a \varphi_a$$

Količina naelektrisanja
 na svim kapljicama

$$\triangleright \quad Q_a = N q_a$$

Potencijal –
 novonastale kaplice

$$\triangleright \quad \varphi_b = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}$$

Količina naelektrisanja
 na novonastaloj kapljici

$$\triangleright \quad q_b = 4\pi\epsilon_0 b \varphi_b$$

Ukupna količina
 naelektrisanja je ista

$$\triangleright \quad Q_a = q_b$$

Odnos potencijala

$$\varphi_b = N \frac{a}{b} \varphi_a$$

Zapremina –
 svih N kaplica

$$\triangleright \quad V_a = N \frac{4}{3} \pi a^3$$

Poluprečnik
 svake od N kapljica

$$\triangleright \quad a = \sqrt[3]{\frac{1}{N} \frac{4\pi}{3V}}$$

Zapremina –
 novonastale kaplice

$$\triangleright \quad V_b = \frac{4}{3} \pi b^3$$

Poluprečnik
 novonastale kaplice

$$\triangleright \quad b = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3V}}$$

Ukupna količina
 materijala je ista

$$\triangleright \quad V_a = V_b$$

Odnos poluprečnika

$$\frac{a}{b} = N^{-1/3}$$

Potencijal
 novonastale kaplice

$$\triangleright \quad \varphi_b = N \frac{a}{b} \varphi_a$$

$$\triangleright \quad \varphi_b = N^{2/3} \varphi_a$$

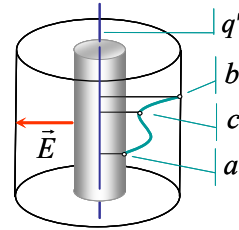
Numerički primer

$$\triangleright \quad \varphi_b = 400 \text{ V}$$

ES.15.10.2

U prostoru između elektroda koaksijalnog voda poluprečnika elektroda a i $b \geq a$ respektivno, nalazi se tačkasto naelektrisanje q . Izračunati rastojanje c za koje je rad sila električnog polja od a do c isti kao od c do b .

☺ Isti problem rešiti u slučaju kocentričnih sfera.

**Rešenje**

Gaussov zakon

u integralnom obliku primeniti na koaksijalnu cilindričnu površinu

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_L q' dl$$

Fluks vektora električnog polja postoji samo kroz omotač

$$\triangleright E 2\pi r L = \frac{q'}{\epsilon_0} L, \quad a \leq r \leq b$$

U unutrašnjosti unutrašnjeg provodnika i van voda polje je jednako nuli.

$$\triangleright \vec{E} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}, \quad a \leq r \leq b$$

Potencijal ne zavisi od puta integracije već samo od položaja tačke u polju i referentne tačke.

$$\triangleright \varphi = \int_l \vec{E} d\vec{r} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \int_r^{r_P} \frac{dr}{r} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_P}{r}$$

◁ Električno polje u koaksijalnom vodu

◁ r_P je vektor položaja referentne tačke.

Razlika potencijala

$$\triangleright \begin{aligned} U_{XY} &= \varphi_Y - \varphi_X = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{r_P}{r_X} - \ln \frac{r_P}{r_Y} \right] \\ U_{XY} &= \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_Y}{r_X} \end{aligned}$$

◁ Ne zavisi od izbora referentne tačke.

Rad između dve tačke srazmeran je naponu između tih tačaka

$$\triangleright A_{XY} = q \int_X^Y \vec{F} d\vec{r} = q \int_X^Y \vec{E} d\vec{r} = q U_{XY}$$

Napon (rad) od $r = a$ do $r = c$

$$\triangleright U_{ac} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{c}{a}$$

Napon (rad) od $r = c$ do $r = b$

$$\triangleright U_{cb} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{c}$$

$$\triangleleft U_{ac} = U_{cb}$$

Iz jednakosti napona (radova) sledi traženo rastojanje.

$$\triangleright c = \sqrt{ab}$$

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

U unutrašnjosti unutrašnjeg provodnika i van voda polje je jednako nuli.

$$\triangleright \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad a \leq r \leq b$$

Napon (rad) od $r = a$ do $r = c$

$$\triangleright U_{ac} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right)$$

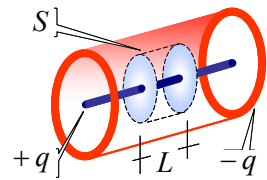
Napon (rad) od $r = c$ do $r = b$

$$\triangleright U_{ac} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\triangleleft U_{ac} = U_{cb}$$

Iz jednakosti napona (radova) sledi traženo rastojanje.

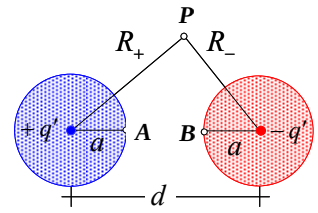
$$\triangleright c = \frac{a+b}{2ab}$$



ES.13.10.1

Otvoren dvožični vod ima provodnike jednakih poluprečnika a . Rastojanje između provodnika je $d \gg a$. Vod je priključen na napon U .

- Odrediti podužnu kapacitivnost voda.
- Odrediti najveći napon na koji vod može da se priključi, a da ne dođe do pojave tihog ili naglog pražnjenja.

**Rešenje**

Gaussov zakon

u integralnom obliku primeniti na koaksijalnu cilindričnu površinu

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_L q' dl$$

Fluks vektora električnog polja postoji samo kroz omotač

$$E 2\pi r L = \frac{q'}{\epsilon_0} L$$

Električno polje linijskog naelektrisanja

$$\vec{E} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$$

1

Potencijal u tački P od pozitivnog naelektrisanja Referentna tačka R_0

$$\varphi_+ = \int_{R_+}^{R_0} \vec{E} d\vec{r}$$

$$\varphi_+ = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{R_+}$$

Potencijal u tački P od negativnog naelektrisanja Referentna tačka R_0

$$\varphi_- = \int_{R_-}^{R_0} \vec{E} d\vec{r}$$

$$\varphi_- = \frac{-q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{R_-}$$

Ukupni potencijal u tački P ne zavisi od izbora R_0

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$$

$$\varphi = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_-}{R_+}$$

Kada je tačka na površini pozitivnog provodnika

$$\varphi_A = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

$$\begin{aligned} R_+ &= a \\ R_- &= d \end{aligned}$$

Kada je tačka na površini negativnog provodnika

$$\varphi_B = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}$$

$$\begin{aligned} R_+ &= d \\ R_- &= a \end{aligned}$$

Napon na dvožičnom vodu

$$U = \varphi_A - \varphi_B$$

$$U = \frac{q'}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

2

Podužna kapacitivnost

$$C' = \frac{q'}{U}$$

$$C' = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}$$

Pošto je $d \gg a$ može da se smatra da je u neposrednoj blizini provodnika polje isto kao i da je usamljen.

Električno polje sledi iz **1** i **2**

$$E = \frac{U}{2r \ln(d/a)}$$

$$i \quad E_{\max} = \frac{U}{2a \ln(d/a)} < E_{kr}$$

Najveća jačina polja je za $r = a$ i manja je od kritične jačine, pa se odatle dobija najveći dozvoljeni napon

$$U_{\max} = 2a \ln(d/a) E_{kr}$$

☺ Numerički primer: $a = 2.5 \text{ mm}$, $d = 1 \text{ m}$, $E_{kr} = 30 \text{ kV/cm}$, $U_{\max} \approx 89.87 \text{ kV}$.

☺ ☺ Inverzni problem: Za zadat maksimalni napon treba odrediti poluprečnik voda.

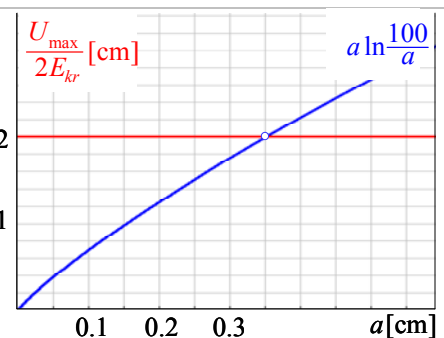
U ovom slučaju treba rešiti transcendentnu jednačinu koja nema analitičko rešenje.

$$a \ln(d/a) = \frac{U_{\max}}{2E_{kr}}$$

Može su primeniti bilo koji numerički metod, ali se do približnog rešenja jednostavno dolazi i grafički. Neka je

$U_{\max} = 120 \text{ kV}$, $E_{kr} = 30 \text{ kV/cm}$ i $d = 100 \text{ cm}$

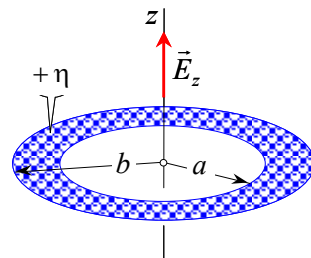
tada se sa grafika očitava $a \approx 3.6 \text{ mm}$.



ES.16.10.2

Ravan kružni prsten poluprečnika a i $b > a$ homogeno je naelektrisan površinskom gustinom naelektrisanja η . Odrediti jačinu električnog polja u tačkama na osi prstena u sledećim slučajevima:

- a) $a > 0, b > a$, kružni prsten,
 b) $a = 0, b > 0$, kružna ploča,
 c) $a > 0, b \rightarrow \infty$, ravan sa kružnom rupom,
 d) $a = 0, b \rightarrow \infty$, neograničena ravan,
 ☺ $b = a + \delta, \delta \rightarrow 0$, zanemarljivo tanak kružni obruč.

**Rešenje**

Električno polje elementarnog naelektrisanja

$$\triangleright dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2}$$

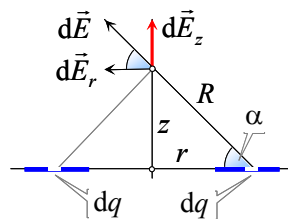
Količina naelektrisanja

$$\triangleright dq = \eta dS = \eta r dr d\theta$$

U tačkama na osi polje ima samo z komponentu. Komponente polja u radijalnom pravcu koje potiču od centralno simetričnih naelektrisanja se anuliraju.

$$\begin{aligned} \triangleright dE_z &= dE \frac{z}{R} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{R^3} \\ dE_z &= \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0} \frac{z r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Presek prstena



$$\begin{aligned} \triangleleft R &= \sqrt{r^2 + z^2} \\ \triangleleft \sin \alpha &= \frac{dE_z}{dE} = \frac{z}{R} \end{aligned}$$

Ukupno električno polje koje potiče od površine prstena

$$\triangleright E_z = \frac{\eta z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\triangleleft \begin{aligned} a &\leq r \leq b \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Prvi integral je tablični i ima vrednost 2π . Drugi integral se rešava smenom $t^2 = r^2 + z^2$

$$\triangleright E_z = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right]$$

Električno polje – kružni prsten
opšti izraz

Kad je $a = 0$ prvi sabirak u opštem izrazu je jednak jedinici.

$$\triangleright E_z = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right]$$

Električno polje – kružna ploča

Kad $b \rightarrow \infty$ drugi sabirak u opštem izrazu teži nuli.

$$\triangleright E_z = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

Električno polje – ravan sa rupom

Kad $a = 0$ i $b \rightarrow \infty$ prvi sabirak u opštem izrazu je jednak jedinici, a drugi sabirak teži nuli.

$$\triangleright E_z = \frac{\eta}{2\epsilon_0}$$

Električno polje – neograničena ravan

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

U opšti izraz treba zameniti $b = a + \delta$. Svesti na zajednički imenilac.

$$\triangleright E_z = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{(a+\delta)^2 + z^2}} \right] = \frac{\eta z}{2\epsilon_0} \frac{\sqrt{(a+\delta)^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2} \sqrt{(a+\delta)^2 + z^2}}$$

Racionalizacija brojioca

$$\begin{aligned} \triangleright E_z &= \frac{\eta z}{2\epsilon_0} \frac{\sqrt{(a+\delta)^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2} \sqrt{(a+\delta)^2 + z^2}} \frac{\sqrt{(a+\delta)^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{(a+\delta)^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + z^2}} \\ E_z &= \frac{\eta z}{2\epsilon_0} \frac{2a\delta + \delta^2}{\sqrt{a^2 + z^2} \sqrt{(a+\delta)^2 + z^2}} \frac{1}{\sqrt{(a+\delta)^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + z^2}} \end{aligned}$$

U brojiocu veličinu δ^2 zanemariti, kao beskonačno malu veličinu drugog reda, i zameniti $q' = \eta\delta$. U imeniocu zameniti $\delta = 0$.

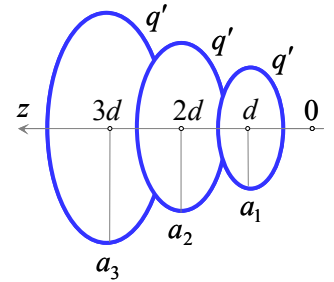
$$\triangleright E_z = \frac{q'}{2\epsilon_0} \frac{a z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Električno polje – kružni obruč

ES.14.03.2

Kružni koaksijalni obruči, različitih poluprečnika a_i , naelektrisani su jednakim po količini i znaku naelektrisanjima q . Rastojanje koordinatnog početka od prvog obruča je d i jednako je rastojanjima između centara obruča. Ao su data tri obruča (slika) odrediti električni polje

- u tačkama na zajedničkoj osi obruča
 - u koordinatnom početku, ako je $a_1 = a$, $a_2 = 2a$ i $a_3 = 3a$
- ☺ Uopštiti prethodni rezultat za beskonačan broj obruča


Rešenje

Količina naelektrisanja $\triangleright dq = q' dl = q' a d\theta$, $[q = q' 2a\pi]$

Polje elementarnog naelektrisanja $d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \hat{R}$, $R = \sqrt{a^2 + (z-z')^2}$

U tačkama na osi polje ima samo aksijalnu komponentu. $\triangleright dE_z = dE \sin \alpha = dE \frac{z-z'}{R} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-z'}{R^3}$

U tačkama na osi obruča, radijalne komponente polja koje potiču od centralno simetričnih elementarnih naelektrisanja se anuliraju.

$\triangleright E_r = 0$

U tačkama na osi obruča aksijalna komponenta je

(U centru $z = z'$ je $E_z = 0$)

$dE_z = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-z'}{R^3} \triangleright E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-z'}{R^3} \int dq \triangleright E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-z'}{R^3}$

ili

$dE_z = \frac{q' a d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-z'}{R^3} \triangleright E_z = \frac{q' a}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-z'}{R^3} \int_0^{2\pi} d\theta \triangleright E_z = \frac{q'}{2\epsilon_0} \frac{a(z-z')}{R^3}$

$E_z = \frac{q'}{2\epsilon_0} \frac{a(z-z')}{[a^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$
 $E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-z'}{[a^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$

U tačkama na osi obruča, polje je zbir polja pojedinih obruča

$\triangleright \vec{E} = (E_{1z} + E_{2z} + E_{3z}) \hat{z}$

$E_{1z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-d}{[a_1^2 + (z-d)^2]^{3/2}}$

$E_{2z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-2d}{[a_2^2 + (z-2d)^2]^{3/2}}$

$E_{3z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-3d}{[a_3^2 + (z-3d)^2]^{3/2}}$

U tački na osi $z=0$, za $a_1 = a$, $a_2 = 2a$ i $a_3 = 3a$ $\triangleright \vec{E}_{z=0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{(a^2 + d^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) \hat{z}$

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

U tački na osi $z=0$, za $a_n = na$ i $n \rightarrow \infty$ $\triangleright \vec{E}_{z=0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{(a^2 + d^2)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \hat{z}$

Rezultat poznat iz teorije Fourierovih redova

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Za $a=0$ obroč degeneriše u tačkasto naelektrisanje

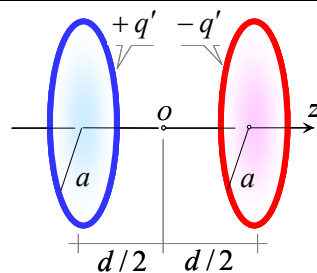
Polje na osi beskonačanog niza tačkastih naelektrisanja $\triangleright \vec{E}_{z=0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \hat{z}$

$\triangleleft$
 E_z

ES.16.06.1

Dva kružna koaksijalna obruća jednakih poluprečnika a se nalaze na međusobnom rastojanju. d Obrući su naelektrisani jednakim količinama naelektrisanja q koja su suprotna po znaku.

- Odrediti jačinu električnog polja u centru sistema O .
 - Odrediti jačinu električnog polja u centru sistema ako je $d = a\sqrt{6}$.
- ☺ Skicirati grafik funkcije po kojoj se menja električno polje.

**Rešenje**

Električno polje elementarnog naelektrisanja

$$\triangleright dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Količina naelektrisanja

$$\triangleright dq = q' dl = q' a d\theta, \quad q' = q/(2\pi a)$$

U tačkama na osi polje ima samo z komponentu.

Komponente polja u radijalnom pravcu se anuliraju.

$$\triangleright dE_z = dE \frac{z + d/2}{R} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{z + d/2}{R^3}$$

Električno polje koje potiče od pozitivno naelektrisanog obruća

$$\triangleright E_z = \frac{+q'}{2\epsilon_0} \frac{a(z + d/2)}{[a^2 + (z + d/2)^2]^{3/2}}$$

Električno polje koje potiče od negativno naelektrisanog obruća

$$\triangleright E_z = \frac{-q'}{2\epsilon_0} \frac{a(z - d/2)}{[a^2 + (z - d/2)^2]^{3/2}}$$

Ukupno električno polje koje stvara par obruća

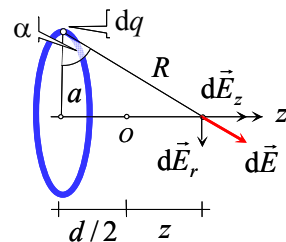
$$\triangleright E_z = \frac{q'a}{2\epsilon_0} \left[\frac{z + d/2}{[a^2 + (z + d/2)^2]^{3/2}} - \frac{z - d/2}{[a^2 + (z - d/2)^2]^{3/2}} \right]$$

U centru sistema, $z = 0$

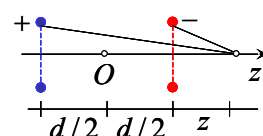
$$\triangleright E_z = \frac{q'a}{2\epsilon_0} \frac{d}{[a^2 + (d/2)^2]^{3/2}} = \frac{q'}{2\epsilon_0 a} \frac{a^2 d}{[a^2 + (d/2)^2]^{3/2}} = \frac{q'}{2\epsilon_0 a} f(d)$$

Za $d = a\sqrt{6}$

$$\triangleright E_z = \frac{q'}{2\epsilon_0 a} f(a\sqrt{6}) = \frac{q'}{2\epsilon_0 a} \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} = E_0 \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$$



$$R = \sqrt{a^2 + (z + d/2)^2}$$



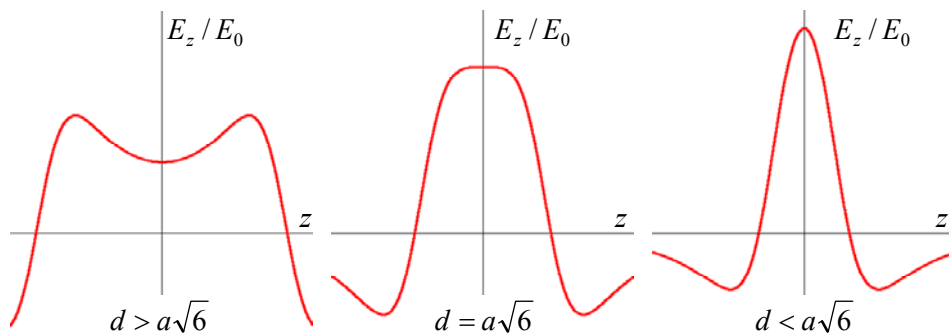
☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

Jedino za rastojanje

$$d = a\sqrt{6}$$

električno polje između obruća je u najvećem delu homogeno.

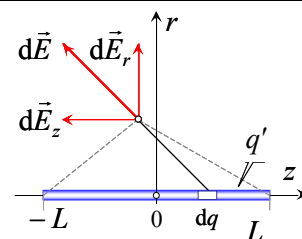
Znak funkcije pokazuje orijentaciji polja u odnosu na z osu.



ES.14.01.1

Nit dužine $2L$ ravnomerno je naelektrisanja količinom naelektrisanja q . U tačkama na osi simetrije niti na rastojanju r

- odrediti električno polje,
- pokazati da se za $L \gg r$ isti rezultat dobija iz *Gaussovog* zakona,
- pokazati da se iz začaka $r \gg L$ štap vidi kao tačkasto naelektrisanje.

**Rešenje**

Električno polje
elementarnog naelektrisanja

$$\triangleright d\vec{E} = \frac{q' dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R}}{R^2}$$

Komponenta električnog polja
u aksijalnom pravcu

$$\triangleright dE_z = \frac{q' dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{R^2}$$

$$dE_z = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \cos\theta d\theta$$

Komponenta električnog polja
u radijalnom pravcu

$$\triangleright dE_r = \frac{q' dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{R^2}$$

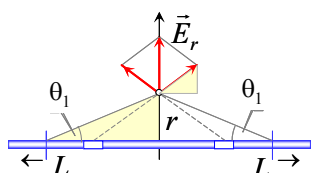
$$dE_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sin\theta d\theta$$

Komponente električnog polja
naelektrisanje niti

$$\triangleright E_z = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \quad \text{i} \quad E_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedenih formula.

Kada je tačka polja na simetrali,
tada je $\theta_2 = \pi - \theta_1$.



$$\sin\theta_1 = \frac{r}{R} = \frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \quad \triangleright E_z = 0$$

$$\triangleright \sin\theta_2 = \sin\theta_1$$

$$\cos\theta_1 = \frac{L}{R} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \quad \triangleright E_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{2L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$$

$$\cos\theta_2 = -\cos\theta_1$$

Ako je $L \gg r$

$$\frac{2L}{\sqrt{L^2 + r^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + (r/L)^2}} \approx 2$$

$$\triangleright E_r = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

◁ Električno polje -
rezultat primene
Gaussovog zakona

Ako je $r \gg L$

$$\frac{2L}{\sqrt{L^2 + r^2}} = \frac{2L}{r\sqrt{1 + (L/r)^2}} \approx \frac{2L}{r}$$

$$\triangleright E_r = \frac{q' 2L}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

◁ Električno polje -
tačkasto naelektrisanje,
 $q = q' 2L$

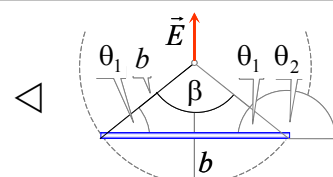
☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

Ako je β centralni ugao, tada je

$$\theta_1 = (\pi - \beta)/2 \quad \text{i} \quad \theta_2 = (\pi + \beta)/2.$$

b je poluprečnik opisane kružnice.

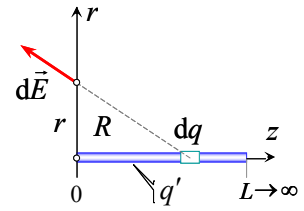
$$\triangleright E = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} \tan \frac{\beta}{2}$$



ES.13.03.2

Nit dužine L ravnomerno je naelektrisanja količinom naelektrisanja q . U tački na rastojanju r od početka niti

- odrediti električno polje,
- odrediti električno polje poluprave, $L \rightarrow \infty$,
- pokazati da se iz tačka $r \gg L$ nit vidi kao tačkasto naelektrisanje.

**Rešenje**

Električno polje
elementarnog
naelektrisanja

$$\triangleright d\vec{E} = \frac{q' dz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{R}$$

Komponenta polja
u aksijalnom pravcu

$$\triangleright dE_z = \frac{q' dz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta$$

$$dE_z = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \cos\theta d\theta$$

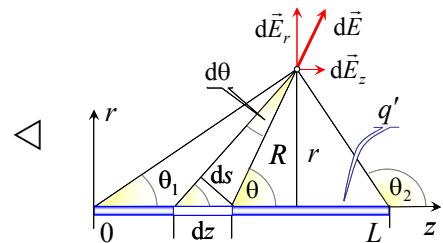
Komponenta polja
u radijalnom pravcu

$$\triangleright dE_r = \frac{q' dz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\theta$$

$$dE_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \sin\theta d\theta$$

Komponente polja
naelektrisanje niti

$$\triangleright E_z = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$



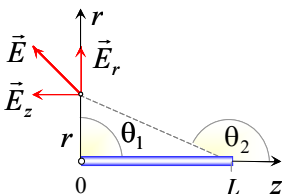
$$\triangleleft \cos\theta = \frac{dE_z}{dE}, \quad \sin\theta = \frac{dE_r}{dE}$$

$$\triangleleft \sin\theta = \frac{r}{R}, \quad \sin\theta = \frac{ds}{dz} = \frac{R d\theta}{dz}$$

$$\triangleleft E_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedenih formula.

Tačka je na pravcu $z = 0$,
 $\theta_1 = \pi/2$



$$\sin\theta_1 = 1$$

$$\sin(\pi - \theta_2) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}} = \sin\theta_2$$

$$\cos\theta_1 = 0$$

$$\cos(\pi - \theta_2) = \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} = -\cos\theta_2$$

$$\triangleright E_z = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + r^2}} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\triangleright E_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$$

Ako $L \rightarrow \infty$ (poluprava)

$$\frac{1}{\sqrt{L^2 + r^2}} - \frac{1}{r} \approx -\frac{1}{r}$$

$$\triangleright E_z = \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Radijalna komponenta polja
poluprave duplo je manja
nego za pravu.

$$\frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \approx \frac{L}{\sqrt{L^2}} = 1$$

$$\triangleright E_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Ako je $r \gg L$

$$\frac{1}{\sqrt{L^2 + r^2}} - \frac{1}{r} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2}} - \frac{1}{r} = 0$$

$$\triangleright E_z = 0$$

Iz udaljenih tačaka
duž se vidi kao
tačkasto naelektrisanje.

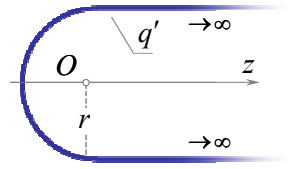
$$\frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \approx \frac{L}{r}$$

$$\triangleright E_r = \frac{q' L}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad q = q' L$$

ES.17.03.2

Polukružnica i dve poluprave koje je na krajevima tangiraju čine konturu koja je ravnomerno naelektrisana podužnom gustinom naelektrisanja q' .

Odrediti električno polje u centru polukružnice O .


Rešenje

Električno polje elementarnog naelektrisanja

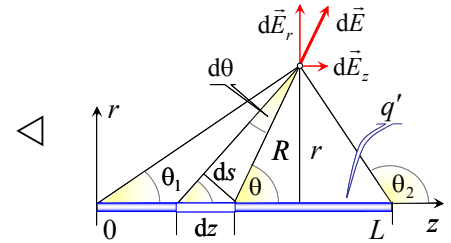
$$\triangleright d\vec{E} = \frac{q' dz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{R}$$

Komponenta polja u aksijalnom pravcu

$$\begin{aligned} \triangleright dE_z &= \frac{q' dz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta \\ dE_z &= \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

Komponenta polja u radijalnom pravcu

$$\begin{aligned} \triangleright dE_r &= \frac{q' dz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\theta \\ dE_r &= \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \sin\theta d\theta \end{aligned}$$



$$\triangleleft \cos\theta = \frac{dE_z}{dE}, \quad \sin\theta = \frac{dE_r}{dE}$$

$$\triangleleft \sin\theta = \frac{r}{R}, \quad \sin\theta = \frac{ds}{dz} = \frac{R d\theta}{dz}$$

Komponente polja naelektrisane niti

$$\triangleright E_z = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \quad \text{ i } \quad E_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedenih formula.

Poluprava		$\theta_1 = \pi/2$	$\triangleright E_z = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$	$\triangleright E_z = -\frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r}$
		$\theta_2 = \pi$	$\triangleright E_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$	$\triangleright E_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r}$

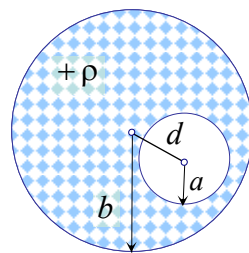
Kružni luk		$dE_y = \frac{q' r d\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta$	$\triangleright E_y = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin\theta d\theta$	$\triangleright E_y = 0$
		$dE_z = \frac{q' r d\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$	$\triangleright E_z = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta d\theta$	$\triangleright E_z = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r} \sin\alpha$

Kontura		$\vec{E}_z = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r} \sin\frac{\pi}{2} \hat{z} - 2 \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{z} = -\frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \hat{z}$	pola kružnice 2 x poluprava
---------	--	--	--

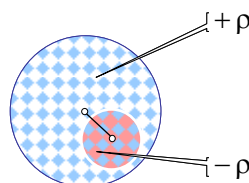
ES.15.09.1

Usamljena homogena zapremenska gustina naelektrisanja $+\rho$ obuhvaćena je sa dve ekscentrične sferne površine poluprečnika a i $b \geq a$, čiji se centri nalaze na ne međusobnom rastojanju d . Odrediti električno polje i to:

- u unutrašnjosti manje sfere ako je $d > 0$,
- u unutrašnjosti manje sfere ako je $d = 0$,
- u unutrašnjosti veće sfere ako je $d = 0$,
- u tačkama van sfera.

**Rešenje**

Positivno naelektrisana sfera sa ekscentričnom sfernom šupljinom (u kojoj nema naelektrisanja) može da se predstavi kao sfera puna sa pozitivnim naelektrisanjima u koju je utisnuta sfera koja sadrži negativna naelektrisanja. U šupljini je tada algebarski zbir svih naelektrisanja jednak nuli.



Gaussov zakon
u integralnom obliku

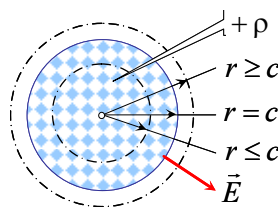
$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Količina naelektrisanja
obuhvaćena zamišljenom sferom
poluprečnika r je $q = \rho V$.

$$\triangleright E 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi \begin{cases} r^3, & r \leq c \\ c^3, & r \geq c \end{cases}$$

Električno polje
homogene zapremenske gustine
naelektrisanja oblika sfere čiji je
poluprečnik c .

$$\triangleright \vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_i = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \hat{r}, & r \leq c \\ \vec{E}_e = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{c^3}{r^2} \hat{r}, & r \geq c \end{cases}$$



U tački koja pripada šupljini električno polje se dobija kao vektorski zbir polja od svake sfere pojedinično, što je metod linearne superpozicije.

Unutrašnje električno polje
pozitivno naelektrisane sfere

$$\triangleright \vec{E}_{ib} = \frac{+\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_b, \quad r_b \leq b$$

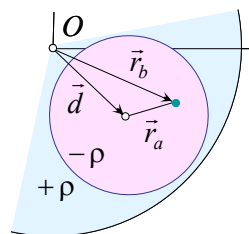
Unutrašnje električno polje
negativno naelektrisane sfere

$$\triangleright \vec{E}_{ia} = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_a, \quad r_a \leq a$$

Električno polje u šupljini

Ukupno: $\vec{E} = \vec{E}_{ib} + \vec{E}_{ia}$

$$\triangleright \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_b - \vec{r}_a) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{d}$$



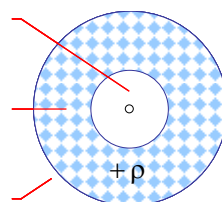
U šupljini električno polje je homogeno i usmereno je u pravcu koji spaja centre sfere, $\vec{r}_b - \vec{r}_a = \vec{d}$

Ako je rastojanje centara jednako nuli, $d = 0$, tj. ako su sfere koncentrične

$$\text{za } r \leq a \quad \vec{E} = \vec{E}_{ib} + \vec{E}_{ia} \quad \triangleright \quad \vec{E} = 0$$

$$\text{za } a \leq r \leq b \quad \vec{E} = \vec{E}_{ib} + \vec{E}_{eb} \quad \triangleright \quad \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{b^3 - r^3}{r^2} \hat{r}$$

$$\text{za } r \geq b \quad \vec{E} = \vec{E}_{ea} + \vec{E}_{eb} \quad \triangleright \quad \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{b^3 - a^3}{r^2} \hat{r}$$



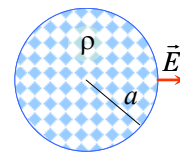
U slučaju koncentričnih sfera do istih rezultata se dolazi i direktnom primenom Gaussovog zakona. Za tačke van sfera, $r \geq b$, Gaussova površina obuhvata količinu naelektrisanja koja je srazmerna razlici zapremina sfera i nije od značaja da li je šupljina ekscentrična ili ne.

ES.12.06.1

Usamljena homogena zapremenska gustina naelektrisanja $+\rho$ obuhvaćena je sfernom površinom poluprečnika a .

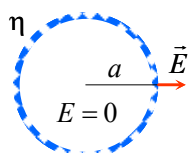
Odrediti:

- električno polje u unutrašnjosti sfere,
- električno polje van sfere,
- energiju sadržanu u električnom polju.

**Rešenje**

Gaussov zakon integralni oblik	$\triangleright \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$	$\triangleright ES = \frac{1}{\epsilon_0} \rho V$	
Gaussova površina $r \leq a$	$\triangleright E 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$	$\triangleright E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$	
Gaussova površina $r \geq a$	$\triangleright E 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi a^3$	$\triangleright E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2}$	
Električno polje	$\triangleright \vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_i = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \hat{r}, & r \leq a \\ \vec{E}_e = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}$	$\triangleright \vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} \hat{r}, & r \leq a \\ \vec{E}_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}$	$\triangleleft q = \rho \frac{4}{3} \pi a^3$
Energija	$\triangleright W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV$	$\triangleleft$	<u>Elementarna sferna zapremina</u> $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ Električno polje zavisi samo od r, pa je $dV = r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi r^2 dr$
	$\triangleright W = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \left(\int_0^a E_i^2 r^2 dr + \int_a^\infty E_e^2 r^2 dr \right)$	$\triangleleft$	
	$\triangleright W = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\int_0^a \frac{r^2}{a^6} r^2 dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^4} r^2 dr \right) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5a} + \frac{1}{a} \right)$	$\triangleleft$	
Energija	$\triangleright W = \frac{3}{20} \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a}$		

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.



Šupla sfera (sfena ljuska) naelektrisana je količiniom naelektrisanja q .

U unutrašnjosti sfere električno polje je jednaka nuli, $E = 0$ za $r \leq a$.

Van sfere električno polje je isto kao i polje tačkastog naelektrisanja u centru.

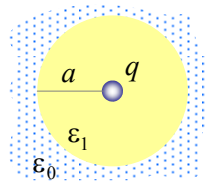
Polje	$\triangleright \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}, r \geq a$	ili	$\vec{E} = \frac{\eta}{\epsilon_0} \frac{a^2}{r^2} \hat{r}, r \geq a$
$dV = 4\pi r^2 dr$	$\triangleright W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2}$	$\triangleright$	$W = \frac{1}{8} \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a}$

ES.12.09.1

U centru lopte, poluprečnika a , od linearnog i homogenog dielektrika, dielektrične konstante ϵ_1 , nalazi se tačkasto naelektrisanje q . Okolni prostor je vazduh.

Odrediti:

- električno polje u dielektriku,
- električno polje u vazduhu,
- površinsku gustinu vezanih naelektrisanja,
- ☺ zapreminsku gustinu vezanih naelektrisanja.

**Rešenje**

Generalisani <i>Gaussov</i> zakon primenjen na sferu $r > 0$	$\triangleright$	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	$\triangleright$	$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad 0 < r < \infty$
---	------------------	--------------------------------	------------------	--

Električno polje u dielektriku	$\triangleright$	$\vec{E}_1 = \vec{D} / \epsilon_1$	$\triangleright$	$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \hat{r}, \quad 0 < r \leq a$
-----------------------------------	------------------	------------------------------------	------------------	--

Električno polje u vazduhu	$\triangleright$	$\vec{E}_0 = \vec{D} / \epsilon_0$	$\triangleright$	$\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad a < r < \infty$
-------------------------------	------------------	------------------------------------	------------------	--

Vektor polarizacije	$\triangleright$	$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1$	$\triangleright$	$\vec{P} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad 0 < r \leq a$
---------------------	------------------	--	------------------	---

Površinska gustina vezanih naelektrisanja	$\triangleright$	$\eta_v = \vec{P} \hat{n} = \vec{P} \hat{r}$	$\triangleright$	$\eta_v = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \frac{q}{4\pi a^2}, \quad r = a$
--	------------------	--	------------------	---

Količina naelektrisanja na površini dielektrika.	$\triangleright$	$q_{sv} = \eta_v 4\pi a^2$	$\triangleright$	$q_{sv} = + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} q$
---	------------------	----------------------------	------------------	---

Zapreminska gustina vezanih naelektrisanja	$\triangleright$	$\rho_v = -\text{div} \vec{P}$	$\triangleright$	$\text{div} \vec{P} \sim \text{div} \frac{\hat{r}}{r^2} = \text{div} \frac{\vec{r}}{r^3}$
---	------------------	--------------------------------	------------------	---

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

$\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \text{div} \vec{r} + \vec{r} \text{grad} \frac{1}{r^3} = \text{div} \vec{r} - \vec{r} \frac{3}{r^4} = 0$	$\left[\begin{array}{l} \text{3D model} \\ \text{div} \vec{r} = 3 \end{array} \right]$	$\triangleright$	$\rho_v = 0, \quad 0 < r < \infty$
--	---	------------------	------------------------------------

Ukupna količina vezanih naelektrisanja je nula	$\triangleright$	$q_v = q_{sv} + q_{lv} = 0$	$\triangleright$	$q_{lv} = -q_{sv} = - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} q$
---	------------------	-----------------------------	------------------	---

Količina naelektrisanja u zapremini dielektrika	$\triangleright$	$q_v = \int_V \rho_v dV$	$\triangleleft$	<u>Diracova delta funkcija</u>
--	------------------	--------------------------	-----------------	--

Sledi, zapreminska gustina naelektrisanja je zgusnuta u centru sfere $r = 0$	$\triangleright$	$\rho_v = - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} q \delta(r)$	$\delta(r) = 0 \text{ za } r \neq 0$
--	------------------	---	--------------------------------------

U stvari, za bilo koje r	$\triangleright$	$\text{div} \frac{\hat{r}}{r^2} = 4\pi \delta(r) = \begin{cases} 0, & r > 0 \\ 4\pi, & r = 0 \end{cases}$	$\int_V \delta(r) dV = 1$
----------------------------	------------------	---	---------------------------

$\triangleright \rho_v = -\text{div} \vec{P} = - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \frac{q}{4\pi} \text{div} \frac{\hat{r}}{r^2} = - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} q \delta(r)$	$\int_V f(r) \delta(r - a) dV = f(a)$
---	---------------------------------------

Ukupna količina naelektrisanja u centru sfere	$\triangleright$	$q_C = q + q_{lv} = q - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} q = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} q$	Uticađ dielektrika zameniti vezanim baelektrisanjima
--	------------------	---	---

<i>Gaussov</i> zakon primenjen na sferu $0 < r \leq a$	$\triangleright$	$\oint_S \vec{E}_1 d\vec{S} = \frac{q_C}{\epsilon_0} \quad 0 < r \leq a$	$\triangleright$	$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \hat{r},$
---	------------------	--	------------------	---

<i>Gaussov</i> zakon u diferencijalnom obliku	$\triangleright$	$\text{div} \vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \text{div} \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \begin{cases} 0, & r > 0 \\ 4\pi, & r = 0 \end{cases}$	$\triangleright$	$\text{div} \vec{E}_1 = \begin{cases} 0, & r > 0 \\ q / \epsilon_1, & r = 0 \end{cases}$
--	------------------	---	------------------	--

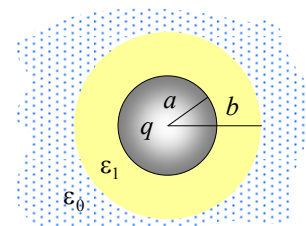
ES.12.10.1

Metalna lopta, poluprečnika a , naelektrisana je količinom naelektrisanja q .

Lopta je izolovana sferinim slojem linearnog i homogenog dielektrika, dielektrične konstante ϵ_1 i poluprečnika b . Okolni prostor je vazduh.

Odrediti:

- električno polje u svim tačkama prostora,
- površinsku i zapreminsku gustinu vezanih naelektrisanja,
- potencijal u centru lopte.

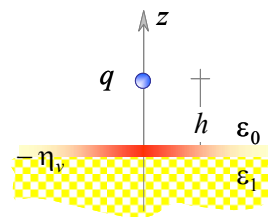
**Rešenje**

Generalisani <i>Gaussov</i> zakon primenjen na sferu $r > 0$	$\triangleright \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	$\triangleright \vec{D} = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \hat{r}, \quad 0 < r < \infty$
Električno polje u metalnoj sferi	$\triangleright q = 0$	$\triangleright E_{unutra} = 0 \quad 0 < r < a$
Električno polje u dielektriku	$\triangleright \vec{E}_1 = \vec{D} / \epsilon_1$	$\triangleright \vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{r^2} \hat{r}, \quad a \leq r \leq b$
Električno polje u vazduhu	$\triangleright \vec{E}_0 = \vec{D} / \epsilon_0$	$\triangleright \vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}, \quad b < r < \infty$
Vektor polarizacije	$\triangleright \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1$	$\triangleright \vec{P} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \hat{r}, \quad a \leq r \leq b$
Površinska gustina vezanih naelektrisanja na površini $r = a$	$\triangleright \eta_{va} = \vec{P} \hat{n} \Big _{r=a} = -P \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \frac{q}{4\pi a^2}$	
Površinska gustina vezanih naelektrisanja na površini $r = b$	$\triangleright \eta_{vb} = \vec{P} \hat{n} \Big _{r=b} = +P \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \frac{q}{4\pi b^2}$	
Zapreminska gustina vezanih naelektrisanja	$\triangleright \rho_v = -\text{div } \vec{P} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \frac{q}{4\pi} \text{div } \frac{\hat{r}}{r^2} = 0$	
Potencijal u centru	$\triangleright \varphi = \int_0^\infty \vec{E} d\vec{l} = \int_0^a \vec{0} d\vec{r} + \int_a^b \vec{E}_1 d\vec{r} + \int_b^\infty \vec{E}_0 d\vec{r} = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_1 a} - \frac{1}{\epsilon_1 b} + \frac{1}{\epsilon_0 b} \right)$	

ES.12.12.1

Tačkasto naelektrisanje $-q$ nalazi se u vazduhu, na visini h od ravni koja ceo prostor deli na vazdušni deo ϵ_0 , $z > 0$ i dielektrični materijal ϵ_1 , $z < 0$.

- Odrediti površinsku gistinu vezanih naelektrisanja.
- Odrediti privlačnu silu između naelektrisanja i ravni.
- Proveriti rezultat zamenjujući dielektrik savršenim provodnikom.

**Rešenje**

$$\text{Vektor polarizacije} \quad \triangleright \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \triangleright \quad \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$\text{Vezana naelektrisanja} \quad \triangleright \quad \eta_v = \vec{P} \hat{n} \quad \triangleright \quad \eta_v = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E} \hat{n} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_z$$

Električno polje potiče od tačkastog naelektrisanja i vezanih naelektrisanja

$$\text{Polje od tačkastog naelektrisanja} \quad \triangleright \quad \vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \hat{R} \quad \triangleright \quad \vec{E}_{0z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\text{Polje od vezanih naelektrisanja} \quad \triangleright \quad E 2\Delta S = \frac{\eta_v}{\epsilon_0} \Delta S \quad \triangleright \quad \vec{E}_{1z} = -\frac{\eta_v}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

$$\text{Normalna komponenta polja u dielektriku} \quad \triangleright \quad \vec{E}_z = \vec{E}_{0z} + \vec{E}_{1z}$$

$$\text{Površinska gustina vezanih naelektrisanja} \quad \triangleright \quad \eta_v = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} - \frac{\eta_v}{2\epsilon_0} \right)$$

$$\text{Kada se gornja jednačina reši po } \eta_v \quad \triangleright \quad \eta_v = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} \frac{q}{2\pi} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$\text{Ukupna količina vezanih naelektrisanja} \quad \triangleright \quad q_v = \int_S \eta_v dS \quad \triangleright \quad q_v = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} \frac{q h}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r dr d\theta}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} q$$

$$\text{beskonačna ravan} \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \triangleright \quad q_v = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} q$$

$$\text{Elementarna Coulombova sila naelektrisanje - ravan} \quad \triangleright \quad dF = \frac{q dq_v}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \quad \triangleright \quad dF_z = \frac{q \eta_v}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{R^3} dS = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} \frac{1}{2\pi} \frac{h^2}{(r^2 + h^2)^3} r dr d\theta$$

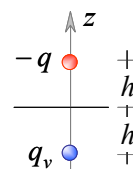
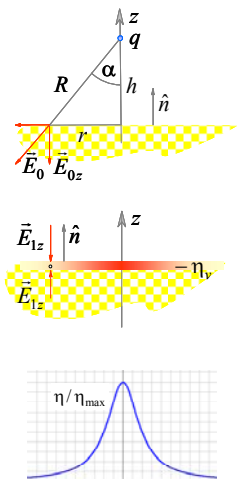
$$\triangleright \quad dF_z = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} \frac{h^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + h^2)^3}$$

$$\text{Ukupna Coulombova sila naelektrisanje - ravan} \quad \triangleright \quad F = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} \frac{1}{4h^2}$$

$$\text{Zamenjen izraz za } q_v \quad \triangleright \quad F = \frac{q q_v}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}, \quad q_v = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} q \quad \text{Sila je privlačna}$$

Uticaj dielektrika je moguće zameniti ekvivalentnim tačkastim naelektrisanjem koje je postavljeno simetrično u odnosu na ravan razdvajanja - kao kod teoreme lika u ravnom provodnom ogledalu. Ovde ogledalo nije savršeno.

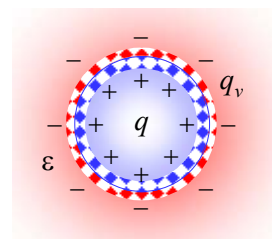
$$\text{Savršeno ogledalo} \quad \epsilon_1 \rightarrow \infty \quad \triangleright \quad q_v = -q \lim_{\epsilon_1 \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} = -q \quad \triangleleft \quad \text{Provodnik je moguće tretirati kao granični slučaj linearnog dielektrika}$$



ES.15.10.2

Usamljena provodna lopta poluprečnika a naelektrisan je količinom naelektrisanja q i nalazi se u homogenom, linearnom i izotropnom dielektriku dielektrične konstante ε . Odrediti:

- zapreminsku gustinu vezanih naelektrisanja ρ_v ,
- površinsku gustinu vezanih naelektrisanja η_v ,
- električno polje $\vec{E}$ u svim tačkama prostora.

**Rešenje**

Maxwellov vektor električnog pomeraja	$\triangleright \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	
U linearnim dielektrcima	$\triangleright \vec{P} = \alpha \vec{E}$	
Konstitutivna veza	$\triangleright \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	
Vektor polarizacije	$\triangleright \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$ $\vec{P} = \varepsilon \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$	1
Treća Maxwellova jednačina u integralnom obliku	$\triangleright \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$	
primenjena na sfernu površinu poluprečnika $r \geq a$.	$\triangleright \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}, r \geq a$	$\triangleleft$
Električno polje metalne lopte $\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{D}$	$\triangleright \vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{q}{4\pi \varepsilon r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}$	$\triangleleft$
Iz 1 se dobija vektor polarizacije dielektrika	$\triangleright \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{q}{4\pi \varepsilon r^2} \hat{r}, r \geq a$	
Površinska gustina vezanih naelektrisanja, $r = a$, $\eta_v = \vec{P} \cdot \hat{n} \Rightarrow \eta_v = -P$	$\triangleright \eta_v = (\varepsilon_0 - \varepsilon) \frac{q}{4\pi \varepsilon a^2}$	
Zapreminska gustina vezanih naelektrisanja, $\rho_v = -\text{div } \vec{P}$	$\triangleright \rho_v = 0$	

Dobijanje konstitutivne veze

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \alpha \vec{E} = (\varepsilon_0 + \alpha) \vec{E} = \\ &= (\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \end{aligned}$$

Izvori vektora električnog pomeraja su samo slobodna naelektrisanja

Na metalnoj lopti naelektrisanja su ravnomerno raspoređena po površini. U unutrašnjosti polje je jednako nuli.

Određivanje divergencije, $r > 0$

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) &= \text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \\ &= \frac{1}{r^3} \text{div } \vec{r} + \vec{r} \cdot \text{grad } r^{-3} = \\ &= \frac{3}{r^3} - \vec{r} \cdot 3r^{-4} \hat{r} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0 \end{aligned}$$

© Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu

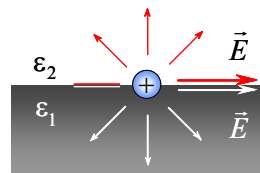
Metalna lopta je ravnomerno naelektrisan po površini. U dielektriku se, uz površinu lopte, formira niz elementarnih dipola čije dejstvo je po zapremini dielektrika anulirano, i ostaje samo površinski sloj vezanih naelektrisanja.

Ukupna količina naelektrisanja $q_{tot} = q + q_v$.	$\triangleright q_{tot} = q + \eta_v 4\pi a^2 = q \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$	
Električno polje metalne lopte u vakuumu potiče od slobodnih naelektrisanja.	$\triangleright \vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r}, r \geq a$	
Električno polje metalne lopte u dielektriku potiče od svih naelektrisanja, slobodnih i vezanih.	$\triangleright \vec{E} = \frac{q_{tot}}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r} = q \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r}$	
Isti rezultat je već dobijen primenom treće Maxwellove jednačine tj. generalisanog Gaussovog zakona.	$\triangleright E = \frac{q}{4\pi \varepsilon} \frac{1}{r^2} < E_0$	
Izvori vektora električnog pomeraja su samo slobodna naelektrisanja.	$\triangleright \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}, r \geq a$	

ES.16.06.1

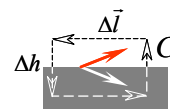
Tačkasto naelektrisanje q leži na razdvojnoj površini dva linearne dielektrika. U svima tačkama okolnog prostora odrediti

- vektor električnog pomeraja,
- vektor električnog polja.
- Proveriti tačnost rezultata na primeru homogene sredine, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$

**Rešenje**

Konzervativni karakter elektrostatičkog polja

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0$$

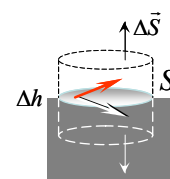


$$\Delta h \rightarrow 0, \quad \vec{E}_1 \Delta \vec{l} + \vec{E}_2 \Delta \vec{l} = 0$$

$$\triangleright E_{1t} = E_{2t} \quad \mathbf{1} \quad \triangleright \quad \varepsilon_2 D_{1t} = \varepsilon_1 D_{2t} \quad \mathbf{3}$$

Generalisani Gaussov zakon

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$$



$$q = 0, \quad \Delta h \rightarrow 0$$

$$\vec{D}_1 \Delta \vec{S} + \vec{D}_2 \Delta \vec{S} = q$$

$$\triangleright D_{1n} = D_{2n} \quad \mathbf{2} \quad \triangleright \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \quad \mathbf{4}$$

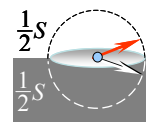
☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedenih graničnih uslova.

Pošto je polje radijalno iz prvog graničnog uslova sledi

$$\triangleright E_1 = E_2 \quad \triangleright \quad D_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_1$$

Generalisani Gaussov zakon

$$\triangleright \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q \quad \triangleright \quad D_1 \frac{S}{2} + D_2 \frac{S}{2} = q$$



$$(D_1 + D_2) 2\pi r^2 = q \quad \triangleright \quad D_1 \left[1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right] = \frac{q}{2\pi r^2}$$

Vektor električnog pomeraja u sredini ε_1

$$\triangleright \vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Vektor električnog pomeraja u sredini ε_2

$$\triangleright \vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Vektor električnog polja u obe sredine je isti

$$\triangleright E = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2} \quad \triangleright \quad \vec{E} = \frac{1}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Ako je sredina homogena

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$$

$$\triangleright \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

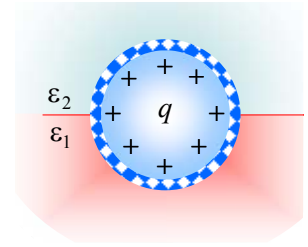


Rezultat koji se dobija i direktnom primenom Gaussovog zakona u vakuumu

ES.16.12.1

Usamljena provodna lopta poluprečnika a naelektrisanja je količinom naelektrisanja q i uronjena je do polovine u tečni, linearni i homogeni dielektrik, dielektrične konstante ϵ_1 . Gas iznad površine razdvajanja je takođe homogen i linearan i ima dielektričnu konstantu ϵ_2 . Odrediti:

- električno polje $\vec{E}$ u svim tačkama prostora,
- raspodelu slobodnih naelektrisanja,
- površinsku gustinu vezanih naelektrisanja η_v ,
- zapreminsku gustinu vezanih naelektrisanja ρ_v ,
- površinsku vezanih gustinu naelektrisanja ako je $\epsilon_2 = \epsilon_0$.
- Proveriti tačnost rezultata smatrajući da je $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$.

**Rešenje**

Generalisani Gaussov zakon	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	$\triangleright (\epsilon_1 E_1 + \epsilon_2 E_2) 2\pi r^2 = q$	1
Granični uslov na površini između dielektrika	$\triangleright E_{1t} = E_{2t}$	$\triangleright$ Polje je radijalno, pa	$\triangleright E_1 = E_2 = E$ 2
Granični uslov na površini provodnika	$\triangleright E_n = \eta / \epsilon$	3 U unutrašnjosti provodnika polje je nula	$\triangleright E = 0$ 4

☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedenih graničnih uslova.

Iz **1** i **2** sledi:

Vektor električnog polja u obe sredine je isti.

$$\triangleright \vec{E} = \frac{1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad r \geq a \quad \triangleright \begin{matrix} D_1 = \epsilon_1 E, \\ D_2 = \epsilon_2 E \end{matrix}$$

Slobodna naelektrisanja na gornjoj polulopti (**3**)

$$\triangleright \eta_{s2} = \epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_2 E, \quad (r = a) \quad \triangleright \eta_{s2} = \frac{\epsilon_2}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{a^2}$$

Slobodna naelektrisanja na donjoj polulopti (**3**)

$$\triangleright \eta_{s1} = \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_1 E, \quad (r = a) \quad \triangleright \eta_{s1} = \frac{\epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{a^2}$$

Vektor polarizacije dielektrika

$$\triangleright \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} \quad \triangleright \vec{P} = \epsilon \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

Jačina polarizacije na površini $r = a$

$$\triangleright \vec{P} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{a^2} \hat{r}$$

Spoljašnja normala dielektrika uz površinu lopte usmerena je ka centru lopte

Vezana naelektrisanja uz gornju poluloptu

$$\triangleright \eta_{v2} = \hat{n} \vec{P} = -(\epsilon_2 - \epsilon_0) E \quad \triangleright \eta_{v2} = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_2}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{a^2}$$

Vezana naelektrisanja uz donju poluloptu

$$\triangleright \eta_{v1} = \hat{n} \vec{P} = -(\epsilon_1 - \epsilon_0) E \quad \triangleright \eta_{v1} = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{a^2}$$

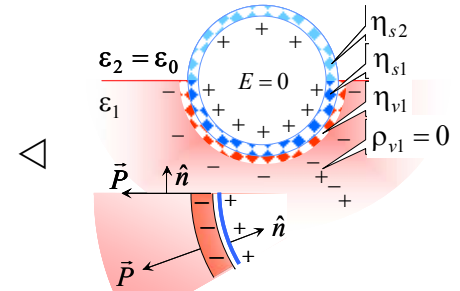
Vezana naelektrisanja - zapreminska gusrtina

$$\triangleright \rho_v = -\text{div} \vec{P} \sim \text{div} \frac{\hat{r}}{r^2} = 0$$

☺ Na ispitu se priznaje ranije izveden rezultat

$\epsilon_2 = \epsilon_0$
Na razdvojnoj površini nema vezanih naelektrisanja. Vektori normale površine i polarizacije su pod pravim uglom. Naelektrisanja se vezuju uz površinu donje polulopte. Vektor normale je usmeren ka centru lopte.

$$\begin{aligned} \eta_{s2} &= \frac{\epsilon_0}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon_1)} \frac{q}{a^2} \\ \eta_{s1} &= \frac{\epsilon_1}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon_1)} \frac{q}{a^2} \\ \rho_v &= 0, \quad \eta_{v2} = 0 \\ \eta_{v1} &= \frac{\epsilon_0 - \epsilon_1}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon_1)} \frac{q}{a^2} \end{aligned}$$



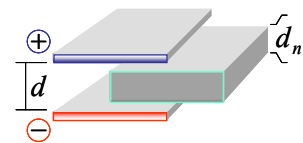
$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0 \quad \triangleright \quad P = 0, \quad \rho_v = 0, \quad \eta_{v2} = \eta_{v1} = 0, \quad \eta_{s2} = \eta_{s1} = \eta_s = \frac{q}{4\pi a^2}, \quad \vec{E} = \frac{\eta_s}{\epsilon_0} \frac{a^2}{r^2} \hat{r}.$$

ES.14.04.1

Elektrode ravnog kondenzatora površina S nalaze se na međusobnom rasrojanju d . U elektrodni prostor se do polovine unese treća, neutralna, elektroda istih dimenzija i debljine $d_n < d$.

Dielektrik u kondenzatoru je vazduh. Odrediti energiju kondenzatora pre i posle unošenja treće elektrode, i to ako je

- kondenzator stalno priključen na izvor napajanja U ,
- kondenzator isključen sa izvora napajanja U pre unošenja elektrode,
- debljina neutralne elektrode zanemarljiva, tj. $d_n = 0$.

**Rešenje**

Kapacitivnost kondenzatora - pre unošenja neutralne elektrode

$$\triangleright C_0 = \frac{q_0}{U_0} \quad \triangleright C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Energija u kondenzatoru - pre unošenja neutralne elektrode

$$\triangleright W_0 = \frac{1}{2} q_0 U_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_0} = \frac{1}{2} C_0 U_0^2$$

Kapacitivnost novonastalih kondenzatora posle unošenja neutralne elektrode



$$\begin{matrix} S_1 = S/2 \\ d_1 = d \end{matrix} \triangleright C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{2d} \quad \triangleright C_1 = \frac{1}{2} C_0$$

$$\begin{matrix} S_2 = S/2 \\ d_2 = (d - d_n)/2 \end{matrix} \triangleright C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{d - d_n} \quad \triangleright C_2 = C_0 \frac{d}{d - d_n}$$

Ekvivalentna kapacitivnost mešovite veze kondenzatora

$$\triangleright C_e = C_1 + \frac{C_2 C_2}{C_2 + C_2} \quad \triangleright C_e = C_1 + \frac{1}{2} C_2 \quad \triangleright C_e = C_0 \frac{2d - d_n}{2(d - d_n)}$$

U opštem slučaju

$$\triangleright d_n > 0 \quad \triangleright C_e > C_0$$

Ako je kondenzator stalno priključen na izvor napajanja naelektrisanje neutralne elektrode izvršiće se na račun energije izvora. Napon ostaje isti, a ukupna energija se povećava.

$$\triangleright W_e = \frac{1}{2} C_e U_0^2 > W_0$$

Ako kondenzator nije priključen na izvor napajanja naelektrisanje neutralne elektrode izvršiće se na račun energije u kondenzatoru. Količine naelektrisanja ostaju iste (preraspodeljene), a ukupna energija se smanjuje.

$$\triangleright W_e = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_e} < W_0$$

U specijalnom slučaju

$$\triangleright d_n = 0 \quad \triangleright C_e = C_0$$

$$\triangleright W_e = W_0$$

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu

U opštem slučaju, predstavljanje kondenzatora pomoću mešovite veze nije moguće. To se pokazuje ispitivanjem graničnih uslova na svim razdvojnim površinama.

Granični uslovi

Razdvojna površina $\epsilon_0 | \epsilon_1$

$$\triangleright E_0 = E_1$$

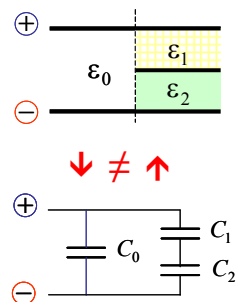
Razdvojnepovršina $\epsilon_0 | \epsilon_2$

$$\triangleright E_0 = E_2$$

Razdvojna površina $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

$$\triangleright \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 \quad \text{---} \quad \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$$

$$\left. \begin{matrix} E_1 = E_2 \\ \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 1 \\ ? \\ 2 \end{matrix}$$



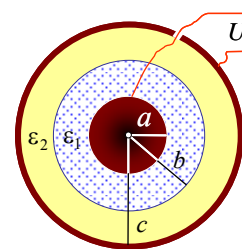
Uslovi **1** i **2** su jednovremeno zadovoljeni samo ako je $\epsilon_1 = \epsilon_2$, tj. ako je u tom delu dielektrik homogen.

ES.17.02.1

Sferni kondenzator, poluprečnika a i $c > a$, priključen je na jednosmerni napon U . Dielektrik u kondenzatoru je dvoslojan sa poluprečnikom razdvojne površi $a < b < c$ i dielektričnim konstantama ϵ_1 i ϵ_2 .

Odrediti:

- električno polje u oba dielektrična sloja,
- kapacitivnost kondenzatora,
- poluprečnik razdvojne površine tako da maksimalna električna polja u oba sloja budu jednaka,
- površinsku gustinu vezanih naelektrisanja na razdvojnoj površini dva dielektrika.

**Rešenje**

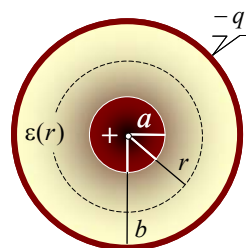
Generalisani Gaussov zakon	$\triangleright \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	$\triangleright \vec{D} = \frac{q}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2}$ za $a < r < c$	
Električno polje - u dielektrinom sloju ϵ_1	$\triangleright \vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_1} \vec{D} = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{\hat{r}}{r^2}$ za $a < r < b$		Električno polje je jednako nuli za $0 < r < a$ i $r > c$.
Električno polje - u dielektrinom sloju ϵ_2	$\triangleright \vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_2} \vec{D} = \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \frac{\hat{r}}{r^2}$ za $b < r < c$		
Napon između elektroda =	$\triangleright U = \int_a^c \vec{E} d\vec{r}$	$\triangleright U = \int_a^c \vec{E} d\vec{r} = \int_a^b \vec{E}_1 d\vec{r} + \int_b^c \vec{E}_2 d\vec{r}$	
zbir napona po slojevima	$\triangleright U = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \int_a^b \frac{dr}{r^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \int_b^c \frac{dr}{r^2}$	$\triangleright U = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{b-a}{ba} + \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \frac{c-b}{cb}$	
Kapacitivnost - recipročna vrednost	$\triangleright \frac{1}{C} = \frac{U}{q}$	$\triangleright \frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{b-a}{ba} + \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{c-b}{cb}$	
Redna veza dva sferna kondenzatora (ϵ_1, a, b) i (ϵ_2, b, c)	$\triangleright \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$	$\triangleright$	
Ako je dielektrik homogen $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$	$\triangleright \frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{b-a}{ba} + \frac{c-b}{cb} \right)$	$\triangleright C = 4\pi\epsilon \frac{ca}{c-a}$	
Najveće vrednosti električnog polja u slojevima	$\triangleright E_{1\max} = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{a^2}$	i $E_{2\max} = \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \frac{1}{b^2}$	
Poluprečnik razdvojne površine dielektrika	$\triangleright E_{1\max} = E_{2\max}$	$\triangleright b = a\sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}$	
Vektor polarizacije - u dielektrinom sloju ϵ_1	$\triangleright \vec{P}_1 = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_0 \vec{E}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{\hat{r}}{r^2}$		
Vektor polarizacije - u dielektrinom sloju ϵ_2	$\triangleright \vec{P}_2 = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_0 \vec{E}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \frac{\hat{r}}{r^2}$		
Vezana naelektrisanja – površinska gustina na razdvojnoj površini, $r = b$	$\triangleright \eta_v = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \hat{n} \Big _{r=b} = \frac{\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1\epsilon_2} \frac{q}{4\pi b^2}$		

ES.17.04.1

Koaksijalni kondenzator poluprečnika a i $b > a$ priključen je na stalni napon U .

Dielektrična konstanta se menja po zakonu $\varepsilon(r) = \frac{a}{r} \varepsilon$.

- Pokazati da je u kondenzatoru električno polje konstantno.
- Odrediti podužnu kapacitivnost kondenzatora.
- Odrediti površinske gistine vezanih naelektrisanja.
- ☺ Odrediti zapreminsku gistinu vezanih naelektrisanja.
- ☺ Pokazati da je ukupna količina vezanih naelektrisanja jednaka nuli.

**Rešenje**

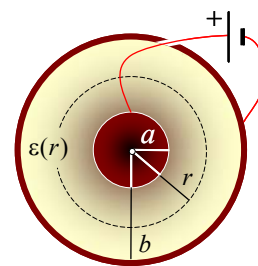
Generalisani <i>Gaussov</i> zakon primenjen na cilindar	$\triangleright \oint_s \vec{D} d\vec{S} = q$	$\triangleright \vec{D} = \frac{q}{2\pi L} \frac{\hat{r}}{r} = \frac{q'}{2\pi} \frac{\hat{r}}{r}$	za $a < r < b$
Električno polje	$\triangleright \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon(r)} \vec{D}$	$\triangleright \vec{E} = \frac{q'}{2\pi \varepsilon(r)} \frac{\hat{r}}{r}$	$\triangleleft \varepsilon(r) = \frac{a}{r} \varepsilon$
☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.			
Električno polje – kada se zameni $\varepsilon(r)$	$\triangleright \vec{E} = \frac{q'}{2\pi \varepsilon} \frac{\hat{r}}{a}$		
Napon	$\triangleright U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r}$	$\triangleright U = \frac{q'}{2\pi \varepsilon a} \int_a^b \hat{r} d\vec{r}$	$\triangleright U = \frac{q'}{2\pi \varepsilon} \frac{b-a}{a}$
Gustina naelektrisanja	$\triangleright q' = 2\pi \varepsilon U \frac{a}{b-a}$		
Podužna kapacitivnost	$\triangleright C' = \frac{q'}{U}$	$\triangleright C' = 2\pi \varepsilon \frac{a}{b-a}$	
Električno polje – kada se zameni q'	$\triangleright \vec{E} = \frac{U}{b-a} \hat{r}$	$\triangleleft E = \text{const.}$	
Vektor polarizacije	$\triangleright \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$	$\triangleright \vec{P} = (\varepsilon(r) - \varepsilon_0) \vec{E}$	$\triangleright \vec{P} = \left(\varepsilon \frac{a}{r} - \varepsilon_0 \right) \vec{E}$
Gustina vezanih naelektrisanja uz pozitivnu elektrodu	$\triangleright \eta_{va} = -P(r=a)$	$\triangleright \eta_{va} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) E$	
Gustina vezanih naelektrisanja uz negativnu elektrodu	$\triangleright \eta_{vb} = +P(r=b)$	$\triangleright \eta_{vb} = +\left(\varepsilon \frac{a}{b} - \varepsilon_0 \right) E$	
☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.			
Zapreminska gustina vezanih naelektrisanja	$\triangleright \rho_v = -\text{div} \vec{P}$	$\triangleright \rho_v = -E \left(\varepsilon a \text{div} \frac{\hat{r}}{r} - \varepsilon_0 \text{div} \hat{r} \right)$	
$\text{div} \frac{\hat{r}}{r} = \text{div} \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2} \text{div} \vec{r} + \vec{r} \text{grad} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} \text{div} \vec{r} - 2\vec{r} \frac{\hat{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2} (\text{div} \vec{r} - 2)$			
$\text{div} \hat{r} = \text{div} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r} \text{div} \vec{r} + \vec{r} \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \text{div} \vec{r} - \vec{r} \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{r} (\text{div} \vec{r} - 1)$			
$\text{div} \vec{r} = 3 \triangleleft \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ $\text{div} \vec{r} = 2 \triangleleft \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$			
Zapreminska gustina vezanih naelektrisanja	$\triangleright \rho_v = \varepsilon_0 E \frac{1}{r}, r > 0$	2D	cilindar $\updownarrow$
$q_v = \eta_{va} S_a + \eta_{vb} S_b + \int_V \rho_v dV, S_a = 2\pi a L, S_b = 2\pi b L, dV = 2\pi L r dr$			
Ukupna količina vezanih naelektrisanja	$\triangleright q_v = -(\varepsilon - \varepsilon_0) E 2\pi a L + \left(\varepsilon \frac{a}{b} - \varepsilon_0 \right) E 2\pi b L + \varepsilon_0 E 2\pi L \int_a^b \frac{1}{r} r dr = 0$		

ES.17.04.1

Sferni kondenzator poluprečnika a i $b > a$ priključen je na stalni napon U .

Dielektrična konstanta se menja po zakonu $\varepsilon(r) = \frac{a^2}{r^2} \varepsilon$.

- Pokazati da je u kondenzatoru električno polje konstantno.
- Odrediti kapacitivnost kondenzatora.
- Odrediti površinske gistine vezanih naelektrisanja.
- ☺ Odrediti zapreminsku gistinu vezanih naelektrisanja.
- ☺ Pokazati da je ukupna količina vezanih naelektrisanja jednaka nuli.

**Rešenje**

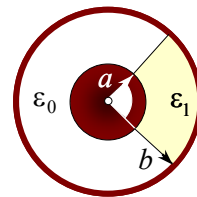
Generalisani Gaussov zakon primenjen na sferu	$\triangleright \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	$\triangleright \vec{D} = \frac{q}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2}$	za $a < r < b$
Električno polje	$\triangleright \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon(r)} \vec{D}$	$\triangleright \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon(r)} \frac{\hat{r}}{r^2}$	$\triangleleft \varepsilon(r) = \frac{a^2}{r^2} \varepsilon$
☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.			
Električno polje – kada se zameni $\varepsilon(r)$	$\triangleright \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{\hat{r}}{a^2}$		
Napon	$\triangleright U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r}$	$\triangleright U = \frac{q}{4\pi\varepsilon a^2} \int_a^b \hat{r} d\vec{r}$	$\triangleright U = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{b-a}{a^2}$
Količina naelektrisanja	$\triangleright q = 4\pi\varepsilon U \frac{a^2}{b-a}$		
Kapacitivnost	$\triangleright C = \frac{q}{U}$	$\triangleright C = 4\pi\varepsilon \frac{a^2}{b-a}$	
Električno polje – kada se zameni q	$\triangleright \vec{E} = \frac{U}{b-a} \hat{r}$	$\triangleleft E = \text{const.}$	
Vektor polarizacije	$\triangleright \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$	$\triangleright \vec{P} = (\varepsilon(r) - \varepsilon_0) \vec{E}$	$\triangleright \vec{P} = \left(\varepsilon \frac{a^2}{r^2} - \varepsilon_0 \right) \vec{E}$
Gustina vezanih naelektrisanja uz pozitivnu elektrodu	$\triangleright \eta_{va} = -P(r=a)$	$\triangleright \eta_{va} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) E$	
Gustina vezanih naelektrisanja uz negativnu elektrodu	$\triangleright \eta_{vb} = +P(r=b)$	$\triangleright \eta_{vb} = +\left(\varepsilon \frac{a^2}{b^2} - \varepsilon_0 \right) E$	
☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.			
Zapreminska gustina vezanih naelektrisanja	$\triangleright \rho_v = -\text{div} \vec{P}$	$\triangleright \rho_v = -E \left(\varepsilon a^2 \text{div} \frac{\hat{r}}{r^2} - \varepsilon_0 \text{div} \hat{r} \right)$	
$\text{div} \frac{\hat{r}}{r^2} = \text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \text{div} \vec{r} + \vec{r} \text{grad} \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^2} \text{div} \vec{r} - 3\vec{r} \frac{\hat{r}}{r^4} = \frac{1}{r^3} (\text{div} \vec{r} - 3)$			
$\text{div} \hat{r} = \text{div} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r} \text{div} \vec{r} + \vec{r} \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \text{div} \vec{r} - \vec{r} \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{r} (\text{div} \vec{r} - 1)$			
$\text{div} \vec{r} = 2$ $\triangleleft \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$			
$\text{div} \vec{r} = 3$ $\triangleleft \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$			
Zapreminska gustina vezanih naelektrisanja	$\triangleright \rho_v = \varepsilon_0 E \frac{2}{r}, \quad r > 0$	3D	sfera $\downarrow \uparrow$
$q_v = \eta_{va} S_a + \eta_{vb} S_b + \int_V \rho_v dV, \quad S_a = 4\pi a^2, \quad S_b = 4\pi b^2, \quad dV = 4\pi r^2 dr$			
Ukupna količina vezanih naelektrisanja	$\triangleright q_v = -(\varepsilon - \varepsilon_0) E 4\pi a^2 + \left(\varepsilon \frac{a^2}{b^2} - \varepsilon_0 \right) E 4\pi b^2 + \varepsilon_0 E 8\pi \int_a^b \frac{1}{r} r^2 dr = 0$		

ES.14.01.1

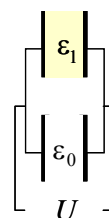
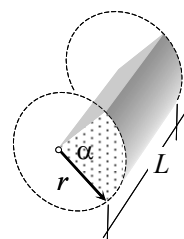
U koaksijalnom vodu, poluprečnika a i $b > a$, unutrašnji vod je pričvršćen za spoljašnji pomoću klinastog oslonca dielektrične konstante ϵ_1 . Izvodnice klina grade ugao α . Ostatak prostora je vazduh.

Vod je priključen na jednosmerni napon U . Odrediti:

- električno polje u delu sa vazduhom i u delu sa dielektrikom,
 - podužnu kapacitivnost voda.
 - Proveriti ispravnost rezultata za slučajeve $\alpha = 0$ i $\alpha = 2\pi$.
 - Kojom ekvivalentnom vezom se može predstaviti kapacitivnost?
- ☺ Koliki najveći napon na koji vod može biti priključen?

**Rešenje**

Generalisani Gaussov zakon	$\triangleright \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	$\triangleright D_0 S_0 + D_1 S_1 = q$	
Granični uslov na površini između dielektrika	$\triangleright E_{1t} = E_{2t}$	$\triangleright$ Polje je radijalno, pa	$\triangleright E_1 = E_2 = E$
Jačina električnog pomeraja	$\triangleright D_0 = \epsilon_0 E$	i $D_1 = \epsilon_1 E$	<u>Gaussova površ</u>
Iz Gaussovog zakona sledi	$\triangleright \epsilon_0 E S_0 + \epsilon_1 E S_1 = q$	$\triangleright E = \frac{q}{\epsilon_0 S_0 + \epsilon_1 S_1}$	
Deo površine zamišljenog cilindra, centralni ugao α	$\triangleright S_1 = \alpha r L$		
Deo površine zamišljenog cilindra, centralni ugao $2\pi - \alpha$	$\triangleright S_0 = (2\pi - \alpha) r L$		
Električno polje – isto u vazduhu i dielektriku	$\triangleright \vec{E} = \frac{q}{L[\epsilon_1 \alpha + \epsilon_0 (2\pi - \alpha)]} \frac{\hat{r}}{r} = \frac{q'}{\epsilon_1 \alpha + \epsilon_0 (2\pi - \alpha)} \frac{\hat{r}}{r}$		
Napon	$\triangleright U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r}$	$\triangleright U = \frac{q'}{\epsilon_1 \alpha + \epsilon_0 (2\pi - \alpha)} \ln \frac{b}{a}$	
Podužna kapacitivnost	$\triangleright C' = \frac{q'}{U}$	$\triangleright C' = \frac{\epsilon_1 \alpha + \epsilon_0 (2\pi - \alpha)}{\ln(b/a)}$	
Kapacitivnost - paralelna veza dva kondenzatora	$\triangleright C' = \frac{\epsilon_1 \alpha}{\ln(b/a)} + \frac{\epsilon_0 (2\pi - \alpha)}{\ln(b/a)}$		
Specijalni slučaj, $\alpha = 0$, u vodu je samo vazduh.	$\triangleright C' = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(b/a)}$		
Specijalni slučaj, $\alpha = 2\pi$, u vodu je samo dielektrik.	$\triangleright C' = \frac{2\pi \epsilon_1}{\ln(b/a)}$		



☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu

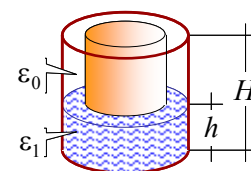


Pri kritičnoj jačini polja oko elektrode se formira jonizovani sloj i materija postaje provodna, pa naelektrisanja počinju da napuštaju elektrodu. Taj proces (korona) traje sve dok polje, zbog sve manje naelektrisanja, ne oslabi ispod kritične vrednosti. Za jačine polja veće od kritičnog dolazi do skoka varianice.

Najveća jačina polja je na unutrašnjoj elektrodi.	$\triangleright E_{\max} = \frac{q'}{\epsilon_1 \alpha + \epsilon_0 (2\pi - \alpha)} \frac{1}{a}$	$\triangleleft E_{\max} \leq E_{kr}$	
Najveće podužno naelektrisanje.	$\triangleright q'_{\max} = E_{kr} a [\epsilon_1 \alpha + \epsilon_0 (2\pi - \alpha)]$		
Najveći dozvoljeni napon zavisi od odnosa b/a .	$\triangleright U_{\max} = \frac{q'_{\max}}{\epsilon_1 \alpha + \epsilon_0 (2\pi - \alpha)} \ln \frac{b}{a} = E_{kr} a \ln \frac{b}{a}$	$\triangleleft$	<u>Vazduh</u> $E_{kr} = 30 \text{ kV/cm}$
Za pravilno odabran odnos poluprečnika dobija se teorijski maksimum.	$\triangleright \frac{d}{da} \left(a \ln \frac{b}{a} \right) = 0 \quad \triangleright \frac{b}{a} = e$	$\triangleright$	$U_{\max_{\max}} = \frac{b}{e} E_{kr}$

ES.16.06.1

Za merenje visine tečnosti se koristi koaksijalni kondenzator koji je načinjen od koaksijalne cevčice visine H i unutrašnjeg i spoljašnjeg poluprečnika a i b . Izračunati koliko se promeni kapacitivnost kada se kondenzator napuni do visine h tečnošću dielektrične konstante ε_1 .

**Rešenje**

Generalisani Gaussov zakon $\triangleright \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q \quad \triangleright \quad D_0 S_0 + D_1 S_1 = q$

Granični uslov na površini između dielektrika $\triangleright E_{0t} = E_{1t} \quad \triangleright \quad E_0 = E_1 = E$
Polje je radialno

Jačina električnog pomeraja $\triangleright D_0 = \varepsilon_0 E \quad \text{i} \quad D_1 = \varepsilon_1 E$

Iz Gaussovog zakona sledi $\triangleright \varepsilon_0 E S_0 + \varepsilon_1 E S_1 = q \quad \triangleright \quad E = \frac{q}{\varepsilon_0 S_0 + \varepsilon_1 S_1}$

Deo površine zamišljenog cilindra u vazduhu $\triangleright S_0 = 2\pi r L_0$

Deo površine zamišljenog cilindra u dielektriku $\triangleright S_1 = 2\pi r L_1$

Električno polje – isto u vazduhu i dielektriku $\triangleright \vec{E} = \frac{q}{2\pi[\varepsilon_0 L_0 + \varepsilon_1 L_1]} \frac{\hat{r}}{r}$

Napon $U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r} \quad \triangleright \quad U = \frac{q}{2\pi[\varepsilon_0 L_0 + \varepsilon_1 L_1]} \ln \frac{b}{a}$

Kapacitivnost $C = \frac{q}{U} \quad \triangleright \quad C = \frac{2\pi[\varepsilon_0 L_0 + \varepsilon_1 L_1]}{\ln(b/a)}$

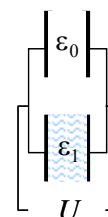
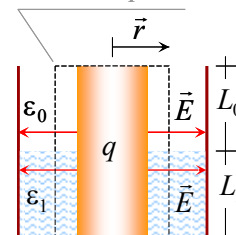
Kapacitivnost – paralelna veza dva kondenzatora $\triangleright C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L_0}{\ln(b/a)} + \frac{2\pi\varepsilon_1 L_1}{\ln(b/a)}$

Radi usaglašavanja sa tekstom zadatka treba zameniti $L_0 = H - h$ i $L_1 = h$

Kapacitivnost – kada nema tečnosti, $h = 0 \quad \triangleright \quad C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 H}{\ln(b/a)}$

Kapacitivnost – kada kada ima tečnosti, $h > 0 \quad \triangleright \quad C = C_0 \left(1 + (\varepsilon_r - 1) \frac{h}{H} \right)$

Gaussova površ



☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu

Prilikom uranjanja u tečnost slobodna naelektrisanja se se prerasporede na sledeći način

$$\left. \begin{aligned} \oint_S \vec{E}_0 d\vec{S} &= \frac{q_0}{\varepsilon_0} \quad \text{—} \quad E_0 = \frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0 L_0} \frac{1}{r} \\ \oint_S \vec{E}_1 d\vec{S} &= \frac{q_1}{\varepsilon_1} \quad \text{—} \quad E_1 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_1 L_1} \frac{1}{r} \end{aligned} \right\} \quad E_0 = E_1 \quad \text{—} \quad \frac{q_0}{\varepsilon_0 L_0} = \frac{q_1}{\varepsilon_1 L_1}$$

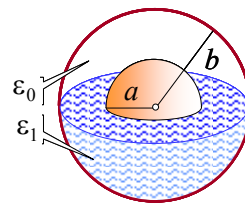
$$\left. \begin{aligned} \text{Ukupna količina slobodnih naelektrisanja} \quad & q_0 + q_1 = q \end{aligned} \right\} \quad \triangleright \quad \begin{aligned} q_0 &= q \frac{\varepsilon_0 L_0}{\varepsilon_0 L_0 + \varepsilon_1 L_1} \\ q_1 &= q \frac{\varepsilon_1 L_1}{\varepsilon_0 L_0 + \varepsilon_1 L_1} \end{aligned}$$

ES.16.10.2

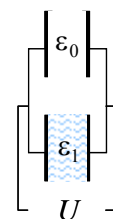
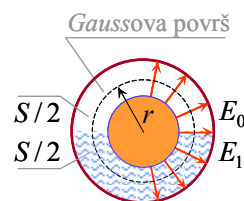
Sferni kondenzator poluprečnika elektroda a i $b > a$ do polovine je ispunjen dielektrikom dielektrične konstante ϵ_1 . Ostatak zapremine je vazduh.

Određiti:

- kapacitivnost kondenzatora,
- najveći napon na koji kondenzator može da se priključi,
- raspodelu slobodnih naelektrisanja.

**Rešenje**

Generalisani <i>Gaussov</i> zakon	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	$\triangleright D_0 S_0 + D_1 S_1 = q$	$a \leq r \leq b$
Granični uslov na površini između dielektrika	$E_{0r} = E_{1r}$	$\triangleright E_0 = E_1 = E$	
Polje je radialno			
Jačina električnog pomeraja	$\triangleright D_0 = \epsilon_0 E$	i $D_1 = \epsilon_1 E$	
Iz <i>Gaussovog</i> zakona sledi	$\triangleright \epsilon_0 E S_0 + \epsilon_1 E S_1 = q$	$\triangleright E = \frac{q}{\epsilon_0 S_0 + \epsilon_1 S_1}$	
Deo površine zamišljene sfere u vazduhu		$\triangleright S_0 = S/2 = 2\pi r^2$	
Deo površine zamišljene sfere u dielektriku		$\triangleright S_1 = S/2 = 2\pi r^2$	
Električno polje – isto u vazduhu i dielektriku	$\triangleright \vec{E} = \frac{q}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon_1)} \frac{\hat{r}}{r^2}, a \leq r \leq b$		1
Napon $U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r}$	$\triangleright U = \frac{q}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon_1)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$		2
Kapacitivnost $C = \frac{q}{U}$	$\triangleright C = 2\pi(\epsilon_0 + \epsilon_1) \frac{ba}{b-a}$		
Kapacitivnost - paralelna veza kondenzatora	$\triangleright C = 2\pi\epsilon_0 \frac{ba}{b-a} + 2\pi\epsilon_1 \frac{ba}{b-a}$		3
Najjače električno polje sledi iz 1 je za $r = a$	$\triangleright E_{\max} = \frac{q}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon_1)} \frac{1}{a^2} \leq E_{kr}$	$\triangleleft$	Proboj u vazduhu nastaje pri $E_{kr} = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$
Količina naelektrisanja	$\triangleright q_{\max} = 2\pi a^2 (\epsilon_0 + \epsilon_1) E_{kr}$		
Najveći dozvoljeni napon sledi iz 2	$\triangleright U_{\max} = E_{kr} \frac{a}{b} (b-a)$	$\triangleleft$	Zависи od odnosa a/b
Teorijski najveća vrednost	$\triangleright \frac{dU_{\max}}{da} = 0$	$\triangleright b = 2a$	$\triangleright U_{\max_{\max}} = E_{kr} \frac{a}{2}$
Količina naelektrisanja u vazдушном delu, iz 2 i 3	$\triangleright q_0 = 2\pi\epsilon_0 \frac{ba}{b-a} U$	$\triangleright$	$q_0 = q \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon_1}$
Količina naelektrisanja u dielektričnom delu, iz 2 i 3	$\triangleright q_1 = 2\pi\epsilon_1 \frac{ba}{b-a} U$	$\triangleright$	$q_1 = q \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0 + \epsilon_1}$



☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

C_0 je kapacitivnost kondenzatora kada je samo sa vazduhom, a C_1

je kapacitivnost kada je ceo ispunjen dielektrikom $\epsilon_1 = \epsilon_r \epsilon_0$.

Kapacitivnost do polovine napunjenog kondenzatora, iz **3**

$$\triangleright C_d = \frac{1}{2}(C_0 + C_1) = \frac{1}{2}C_0(1 + \epsilon_r)$$

Kondenzator do polovine napunjen tečnim dielektrikom priključen je na napon U_d . Zatim se napon isključi, a dielektrik ispusti. Premereni napon na kondenzatoru je sada U_0 .

Dielektrična konstanta

$$\triangleright q_d = C_d U_d = C_0 U_0 = q_0$$

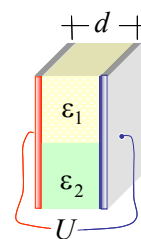
$$\triangleright \epsilon_r = 2U_0 / U_d - 1$$

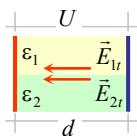
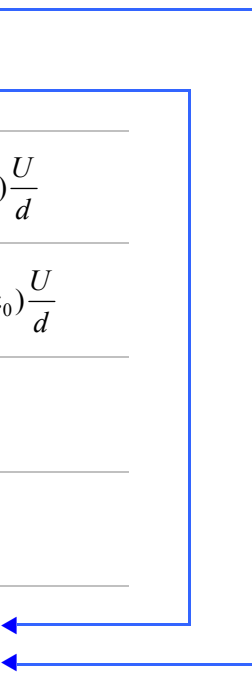
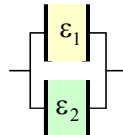
ES.12.01.1

Ravnan kondenzator, sa rastojanjem između elektroda d , čije su površine S , priključen je na jednosmerni napon U . Dielektrik u kondenzatoru poprečno je podeljen na dva jednaka bloka sa dielektričnim konstantama ϵ_1 i ϵ_2 .

Odrediti:

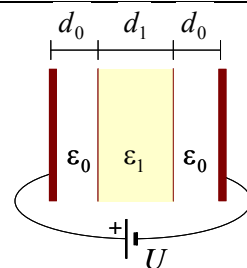
- električno polje u oba dielektrika,
- raspodelu slobodnih naelektrisanja,
- raspodelu vezanih naelektrisanja,
- kapacitivnost kondenzatora.

**Rešenje**

Granični uslov $\epsilon_1 \epsilon_2$	$\triangleright E_{1t} = E_{2t}$	
Električno polje je jednako u oba bloka	$\triangleright \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E} = \frac{U}{d}$	
Napon je isti bez obzira na put integracije	$\triangleright U = \int_1^2 \vec{E}_1 d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_2 d\vec{l} = Ed$	
Površinska gustina slobodnih naelektrisanja uz ϵ_1	$\triangleright +\eta_1 = D_1 = \epsilon_1 E = \epsilon_1 \frac{U}{d}$	
Površinska gustina slobodnih naelektrisanja uz ϵ_2	$\triangleright +\eta_2 = D_2 = \epsilon_2 E = \epsilon_2 \frac{U}{d}$	
Površinska gustina vezanih naelektrisanja u ϵ_1	$\triangleright -\eta_{v1} = P_1 = D_1 - \epsilon_0 E = \epsilon_1 E - \epsilon_0 E = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{U}{d}$	
Površinska gustina vezanih naelektrisanja u ϵ_2	$\triangleright -\eta_{v2} = P_2 = D_2 - \epsilon_0 E = \epsilon_2 E - \epsilon_0 E = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{U}{d}$	
Površinska gustina slobodnih i vezanih naelektrisanja uz ϵ_1	$\triangleright \eta_1 + \eta_{v1} = \epsilon_1 \frac{U}{d} - (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{U}{d} = \epsilon_0 \frac{U}{d}$	
Površinska gustina slobodnih i vezanih naelektrisanja uz ϵ_2	$\triangleright \eta_2 + \eta_{v2} = \epsilon_2 \frac{U}{d} - (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{U}{d} = \epsilon_0 \frac{U}{d}$	
Kapacitivnost	$\triangleright C = \frac{q}{U} = \frac{1}{U} (q_1 + q_2) = \frac{1}{U} \left(\eta_1 \frac{S}{2} + \eta_2 \frac{S}{2} \right)$	
Kapacitivnost može da se predstavi kao paralelna veza dva kondenzatora	$\triangleright C = \frac{1}{U} \left(\epsilon_1 \frac{U}{d} \frac{S}{2} + \epsilon_2 \frac{U}{d} \frac{S}{2} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_1 \frac{S}{d} + \frac{1}{2} \epsilon_2 \frac{S}{d}$ $\triangleright C = C_1 + C_2$	

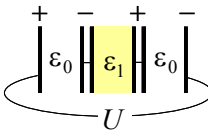
ES.14.03.1

Ravan kondenzator, priključen na stalni napon U , ispunjen je dielektrikom propustljivosti ϵ_1 i debljine d_1 . Zbog nesavršenosti obrade elektroda između elektroda i dielektrika pojavljuju se dva vazдушna procepa debljine d_0 .



- Koliki je odnos jačina električnog polja u procepu i dielektriku?
- Odrediti kapacitivnost kondenzatora.

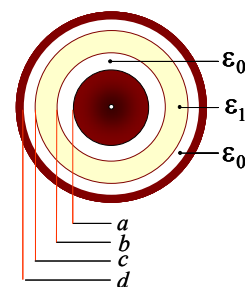
Rešenje

Generalisani Gaussov zakon	$\triangleright \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	$\triangleright DS = q$	$\triangleright D = \frac{q}{S}$	$\triangleright D = \eta$
Električno polje – u vazдушnim procepima	$\triangleright E_0 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$	$\triangleright E_0 = \frac{\eta}{\epsilon_0}$	0	
Električno polje – u dielektriku	$\triangleright E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{q}{\epsilon_1 S}$	$\triangleright E_1 = \frac{\eta}{\epsilon_1}$	1	
Napon	$\triangleright U = E_0 \delta + E_2 d + E_0 \delta$	$\triangleright U = 2 \frac{q}{S} \frac{d_0}{\epsilon_0} + \frac{q}{S} \frac{d_1}{\epsilon_1}$		
Površinska gustina naelektrisanja	$\triangleright U = \eta \left(\frac{2d_0}{\epsilon_0} + \frac{d_1}{\epsilon_1} \right)$	$\triangleright \eta = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 U}{2d_0 \epsilon_1 + d_1 \epsilon_0}$		
Električno polje 0 i 1	$\triangleright E_0 = \frac{\epsilon_1 U}{2d_0 \epsilon_1 + d_1 \epsilon_0}$	i $E_1 = \frac{\epsilon_0 U}{2d_0 \epsilon_1 + d_1 \epsilon_0}$	$\triangleright E_0 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} E_1$	
Kapacitivnost – recipročna vrednost	$\triangleright \frac{1}{C} = \frac{q}{U} = 2\epsilon_0 \frac{S}{d_0} + \epsilon_1 \frac{S}{d_1}$ $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}$	$\triangleright$ 	$\triangleleft$ Kapacitivnost = redna veza tri kondenzatota	
☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.				
Jačina polarizacije u dielektriku	$\triangleright P = D - \epsilon_0 E_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1$	$\triangleright P = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \eta$		
Zapreminska gustina vezanih naelektrisanja	$\triangleright \rho_v = -\text{div} \vec{P} = 0$	$\triangleleft$ Polarizacija je homogena (ne zavisi od koordinata)		
Površinska gustina vezanih naelektrisanja	$\triangleright \eta_v = \mp P = \mp \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \eta$	$\triangleleft$ Sa znakom minus uz pozitivnu elektrodu i obrnuto		
Ukupna količina vezanih naelektrisanja	$\triangleright q_v = -\eta_v S + \eta_v S + \rho_v V$	$\triangleleft q_v = 0$, što mora uvek da bude		
Električno polje u dielektriku 1	$\triangleright E_1 = \frac{\eta}{\epsilon_1}$	$\triangleleft E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{q}{\epsilon_1 S} = \frac{\eta}{\epsilon_1}$	1	
Električno polje u dielektriku	$\triangleright E_1 = \frac{\eta_{ukupno}}{\epsilon_0} = \frac{\eta + \eta_v}{\epsilon_0}$	$\triangleleft$ Dielektrik se zameni vakuumom, a uticaj dielektrika se zameni vezanim naelektrisanjima		
Ukupna površinska gustina naelektrisanja uz pozitivnu elektrodu	$\triangleright \eta_{ukupno} = \eta - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \eta = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \eta$			
Električno polje u dielektriku	$\triangleright E_1 = \frac{\eta_{ukupno}}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 \epsilon_1} \eta = \frac{\eta}{\epsilon_1}$	$\triangleleft$ što je poznat rezultat 1		

ES.16.12.1

U sfernom kondenzatoru, poluprečnika a i $d > a$, dielektrični sloj, dielektrične konstante ϵ_1 , i poluprečnika b i $c > b$, ne naleže uz elektrode tako da se pojavljuje nepoželjni vazdušni procep. Kondenzator je priključen na jednosmerni napon U . Odrediti

- električno polje u delovima sa vazduhom i u delu sa dielektrikom,
 - kapacitivnost kondenzatora.
- ☺ Skicirati grafik promene električnog polja.

**Rešenje**

Generalisani Gaussov zakon $\triangleright \oint_s \vec{D} d\vec{S} = q \quad \triangleright \quad \vec{D} = \frac{q}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \text{za} \quad a < r < d$

Električno polje u vazduhu uz unutrašnju elektrodu $\triangleright \quad \vec{E}_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \text{za} \quad a < r < b$

Električno polje u dielektriku $\triangleright \quad \vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_1} \vec{D} = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \text{za} \quad b < r < c$

Električno polje u vazduhu uz spoljačnju elektrodu $\triangleright \quad \vec{E}_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \text{za} \quad c < r < d$

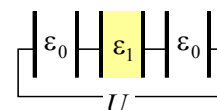
Električno polje je jednako nuli za $0 < r < a$ i $r > d$.

Napon između elektroda $\triangleright \quad U = \int_a^d \vec{E}(r) d\vec{r}$

Napon između elektroda je zbir parcijalnih napona $\triangleright \quad U = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \int_a^b \frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{1}{\epsilon_1} \int_b^c \frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \int_c^d \frac{\hat{r}}{r^2} \right)$

Recipročna vrednost kapacitivnosti $\triangleright \quad \frac{U}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ba} + \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{c-b}{cb} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d-c}{dc}$

Kondenzator je serijska veza tri sferna kondenzatora $\triangleright \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

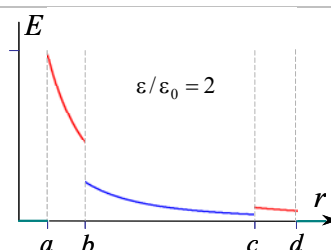


☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu

Ovde je radi jednostavnosti skiciran grafik $\frac{4\pi\epsilon_0}{q} E$, tako da je

$\frac{4\pi\epsilon_0}{q} E = \frac{1}{r^2} \quad \text{za} \quad a < r < b \text{ i } c < r < d$

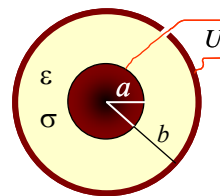
$\frac{4\pi\epsilon_0}{q} E = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{1}{r^2} \quad \text{za} \quad b < r < c$



DC.16.12.1

Sferni kondenzator poluprečnika a i $b > a$ ispunjen je linearnim, homogenim i nesavršenim dielektrikom čija je dielektrična konstanta ϵ , a provodnost σ . Kondenzator je priključen na jednosmerni napon U . Odrediti

- kapacitivnost kondenzatora,
- provodnost dielektrika (odvodnost kondenzatora),
- odnos kapacitivnosti i provodnosti.



Rešenje

Gaussov zakon	$\triangleright \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon}$	$\triangleright E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon}$	$\triangleright \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}}{r^2}, a \leq r \leq b$
Napon	$\triangleright U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r}$	$\triangleright U = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{b-a}{ba}$	
Kapacitivnost	$\triangleright C = \frac{q}{U}$	$\triangleright C = 4\pi\epsilon \frac{ba}{b-a}$	
Ohmov zakon	$\triangleright \vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\triangleright \vec{J} = \frac{\sigma q}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}}{r^2}$	$\triangleright \vec{J} = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}}{r^2}$
Jačina struje	$\triangleright I = \int_S \vec{J} d\vec{S}$	$\triangleright I = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon} \frac{4\pi r^2}{r^2}$	$\triangleright I = q \frac{\sigma}{\epsilon}$
Provodnost	$\triangleright G = \frac{I}{U}$	$\triangleright G = 4\pi\sigma \frac{ba}{b-a}$	
Odnos C/G	$\triangleright \frac{C}{G} = \frac{q}{U} \frac{U}{I} = \frac{q}{I}$	$\triangleright \frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma}$	

☺ Do istih odnosa dolazi se i na sledeći način:

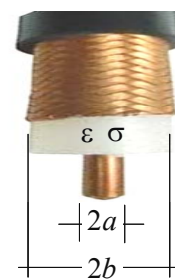
 nesavršen dielektrik= =nesavršen provodnik	▷ Kapacitivnost	▷ $C = \frac{q}{U}$	$\left[\begin{array}{l} \frac{C}{G} = \frac{q}{I} \end{array} \right]$	$\triangleright \frac{C}{G} = \frac{q}{I} = \frac{\epsilon}{\sigma}$	
	▷ Provodnost	▷ $G = \frac{I}{U}$			
	▷ Kapacitivnost	▷ $C = \epsilon \frac{S}{d}$	$\left[\begin{array}{l} \frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma} \end{array} \right]$		
	▷ Provodnost	▷ $G = \sigma \frac{S}{d}$			

Odnos $\tau = \epsilon/\sigma$ dimenziono predstavlja vreme ($q/I = t$) i naziva se vreme relaksacije. Od tog odnosa zavisi brzina kojom naelektrisanja vezana uz elektrode otiču u obliku struje.

DC.13.04.1

Koaksijalni vod poluprečnika a i $b > a$ ispunjen je linearnim, homogenim i nesavršenim dielektrikom čija je dielektrična konstanta ϵ , a provodnost σ . Vod je priključen na jednosmerni napon U . Odrediti

- podužnu kapacitivnost voda,
- podužnu provodnost dielektrika,
- odnos podužne kapacitivnosti i provodnosti.

**Rešenje**

Gaussov zakon – primenjen na cilindar	$\triangleright \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon}$	$\triangleright E 2\pi r L = \frac{q' L}{\epsilon}$
--	--	---

Električno polje	$\triangleright \vec{E} = \frac{q'}{2\pi\epsilon r} \hat{r}, a \leq r \leq b$
------------------	---

Napon	$\triangleright U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r}$	$\triangleright U = \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$
-------	--	--

Podužna kapacitivnost	$\triangleright C' = \frac{q'}{U}$	$\triangleright C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$
--------------------------	------------------------------------	---

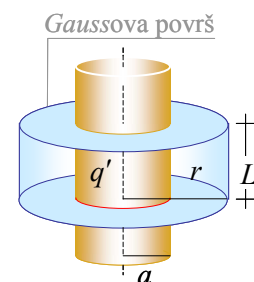
Ohmov zakon – gustina struje	$\triangleright \vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\triangleright \vec{J} = \frac{\sigma q' \hat{r}}{2\pi\epsilon r}$
---------------------------------	---	---

Jačina struje	$\triangleright I = \int_S \vec{J} d\vec{S}$	$\triangleright I = \frac{\sigma q' 2\pi r L}{2\pi\epsilon r}$	$\triangleright I = q' L \frac{\sigma}{\epsilon}$
---------------	--	--	---

Provodnost	$\triangleright G = \frac{I}{U}$	$\triangleright G = \frac{2\pi\sigma L}{\ln(b/a)}$
------------	----------------------------------	--

Podužna provodnost	$\triangleright G' = \frac{G}{L}$	$\triangleright G' = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$
--------------------	-----------------------------------	---

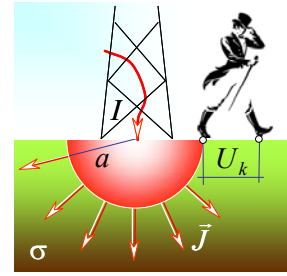
Odnos C'/G'	$\triangleright \frac{C'}{G'} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma}$	$\triangleright \frac{C'}{G'} = \frac{\epsilon}{\sigma}$
---------------	--	--



DC.15.10.2

Poluloptasta elektroda poluprečnika a načinjena je od savršenog provodnika i ukopana je u električno homogenu zemlju specifične provodnost σ . U elektrodi utiče struja kvara I .

- a) Za datu dužinu koraka l_k odrediti najveći napon koraka U_k .
 b) Odrediti prelaznu otpornost R_{uz} između elektrode i okolne sredine.

**Rešenje**

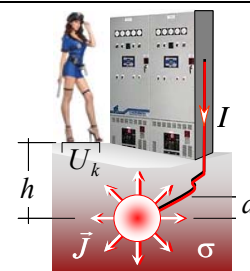
Gustina struje	$\triangleright \oint_S \vec{J} d\vec{S} = I$	$\triangleright J \frac{1}{2} S = I$	$\triangleright \vec{J} = \frac{I}{2\pi r^2} \hat{r}$
Ohmov zakon	$\triangleright \vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\triangleright \vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} \hat{r}$	$\triangle$
Napon između proizvoljnih tačaka	$\triangleright U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r}$	$\triangleright U = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$	1
Potencijal elektrode	$\triangleright \begin{matrix} r_a = a \\ r_b \rightarrow \infty \end{matrix}$	$\triangleright \varphi_a = \frac{I}{2\pi\sigma a}$	
Otpornost	$\triangleright R_{uz} = \frac{\varphi_a}{I}$	$\triangleright R_{uz} = \frac{1}{2\pi\sigma a}$	
Napon koraka sledi iz 1	$\triangleright \begin{matrix} r_a = r \\ r_b = r_a + l_k \end{matrix}$	$\triangleright U_k = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{l_k}{r(r + l_k)}$	
Najveći napon koraka	$\triangleright r = a$	$\triangleright U_k = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{l_k}{a(a + l_k)}$	$\triangleright U_k = IR_{uz} \frac{l_k}{(a + l_k)}$

© Numerički primer: $\sigma = 0.01 \text{ S/m}$, $a = 0.5 \text{ m}$, $I = 100 \text{ A}$, $l_k = 0.8 \text{ m} \Rightarrow R_{uz} \approx 32 \Omega$, $U_k \approx 1969 \text{ V}$

DC.14.10.3

Loptasta elektroda poluprečnika a načinjena je od savršenog provodnika i ukopana je na dubinu h u električno homogenu zemlju specifične provodnost σ . U elektrodu utiče struja kvara I .

- a) Odrediti tačke na površini zemlje gde je električno polje najveće.
b) Za datu dužinu koraka l_k odrediti najveći napon koraka U_k .

**Rešenje**

Pošto je uzemljivač duboko ukopan u zemlju, gustina struje i električno polje mogu potražiti kao za usamljena sfernu elektrodu u homogenoj provodnoj sredini.

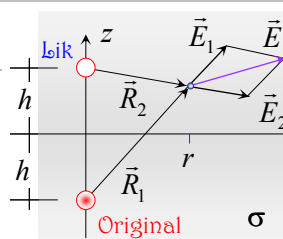
$$\text{Gustina struje} \quad \triangleright \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I \quad \triangleright JS = I \quad \triangleright \vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\text{Ohmov zakon} \quad \triangleright \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \triangleright \vec{E} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \hat{r}$$

Uticaj površine zemlje zamenjuje se uticajem simetrično postavljenog lika, ali se vazduh zamenjuje zemljom. Teorema lika u ravnom ogledalu.

$$\text{Električno polje uzemljivača} \quad \triangleright \vec{E}_1 = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{\hat{R}_1}{R_1^2} \quad \triangleleft R_1 = \sqrt{r^2 + (h+z)^2}$$

$$\text{Električno polje lika uzemljivača} \quad \triangleright \vec{E}_2 = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{\hat{R}_2}{R_2^2} \quad \triangleleft R_2 = \sqrt{r^2 + (h-z)^2}$$



$$\text{Na površini zemlje } z=0 \quad \triangleright R_1 = R_2 = \sqrt{r^2 + h^2} \quad \triangleright E_1 = E_2 = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{1}{r^2 + h^2}$$

$$\text{Električno polje ima samo horizontalnu komponentu.} \quad \triangleright E = 2E_1 \cos(\vec{R}_1, \hat{r}) = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

Električno polje je jednako nuli za $r=0$ i $r \rightarrow \infty$. Prema Rolleovoj teoremi između dve nule neprekidne funkcije postoji ekstremna (ovde je to maksimum) vrednost.

$$\frac{dE}{dr} = 0 \quad \triangleright \quad r = \frac{h}{\sqrt{2}} \quad \triangleright \quad E_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{I}{\pi \sigma h^2} \quad \triangleleft \text{Polje je najveće u tačkama na kružnici datog poluprečnika.}$$

$$\text{Napon između dve tačke na površini zemlje} \quad \triangleright U = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + h^2}} \right)$$

$$\text{Najveći napon koraka se dobija za:} \quad \triangleright r_1 = \frac{h}{\sqrt{2}} \text{ i } r_2 = \frac{h}{\sqrt{2}} + l_k$$

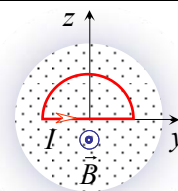
$$\text{Približno najveći napon koraka je} \quad \triangleright U_{\max} \approx E_{\max} l_k$$

© Numerički primer: $\sigma = 0.01 \text{ S/m}$, $h = 5 \text{ m}$, $I = 100 \text{ A}$, $l_k = 1 \text{ m} \Rightarrow U_k \approx 25 \text{ V}$

EM.16.01.2

Kroz konturu oblika polukružnice poluprečnika a protiče stalna struja jačine I . Kontura se u celosti nalazi u poprečnom homogenom magnetnom polju jačine B .

- Odrediti ukupnu silu kojom polje deluje na konturu.
- Pokazati da dobijeni rezultat važi za bilo koji zatvorenu konturu

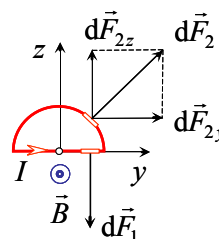
**Rešenje**

Magnetna sila na strujni element	$\triangleright$	$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$	
Magnetna sila na strujnu nit	$\triangleright$	$\vec{F} = I \left[\int_X^Y d\vec{l} \right] \times \vec{B} = I\vec{L} \times \vec{B}$	$\triangleleft$
Magnetna sila na zatvorenu konturu	$\triangleright$	$\vec{F} = I \left[\oint_C d\vec{l} \right] \times \vec{B} = \vec{0}$	$\triangleleft$
Niz diferencijalnih dužina formira zatvoreni poligon vektora.	$\triangleright$	$\oint_C d\vec{l} = \vec{0}$	$\triangleleft$

$\sum d\vec{l} = \vec{0}$, $\sum dl = \text{Obim}$

☺ Pojašnjenja koja slede nisu tražena na ispitu.

U konkretnom slučaju	$\triangleright$	$\vec{B} = B\hat{x}$
Element dužine prečnika	$\triangleright$	$d\vec{l} = dy\hat{y}$
Element dužine luka	$\triangleright$	$d\vec{l} = dl\hat{\theta} = a d\theta\hat{\theta}$
Magnetna sila koja deluje na element prečnika polukružnice	$\triangleright$	$d\vec{F}_1 = I d\vec{l} \times \vec{B} = IB dy(\hat{y} \times \hat{x}) = -IB dy\hat{z}$
Magnetna sila koja deluje na element luka polukružnice	$\triangleright$	$d\vec{F}_2 = I d\vec{l} \times \vec{B} = IBa d\theta(\hat{\theta} \times \hat{x})$
komponenta u y pravcu	$\triangleright$	$dF_{2y} = aIB d\theta \cos\theta\hat{y}$
komponenta u z pravcu	$\triangleright$	$dF_{2z} = aIB d\theta \sin\theta\hat{z}$



Ukupna magnetna sila na prečnik	$\triangleright$	$\vec{F}_1 = -IB \int_{-a}^a dy\hat{z}$	$\triangleright$	$\vec{F}_1 = -2IBa\hat{z}$
Ukupna magnetna sila na luk u y pravcu	$\triangleright$	$\vec{F}_{2y} = IBa \int_0^\pi \cos\theta d\theta\hat{y}$	$\triangleright$	$\vec{F}_{2y} = \vec{0}$
Ukupna magnetna sila na luk u z pravcu	$\triangleright$	$\vec{F}_{2z} = IBa \int_0^\pi \sin\theta d\theta\hat{z}$	$\triangleright$	$\vec{F}_{2z} = 2IBa\hat{z}$
Ukupna magnetna sila na celu konturu	$\triangleright$	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{2z}$	$\triangleright$	$\vec{F} = \vec{0}$

☺☺ Do istog rezultata dolazi se i na sledeći način:

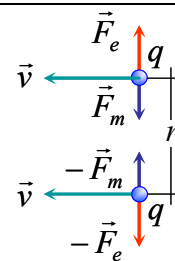
	$\triangleright$	$\vec{B} = B\hat{x}$ $\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$ $\hat{\theta} \times \hat{x} = (-\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) \times \hat{x}$ $\hat{\theta} \times \hat{x} = \sin\theta\hat{z} - \cos\theta\hat{y}$	$\triangleright$	$d\vec{F}_2 = I d\vec{l} \times \vec{B} = IBa d\theta(\hat{\theta} \times \hat{x})$ $\vec{F}_2 = IBa \int_0^\pi \sin\theta d\theta\hat{z} - IBa \int_0^\pi \cos\theta d\theta\hat{y} = 2IBa\hat{z}$ $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -2IBa\hat{z} + 2IBa\hat{z} = \vec{0}$
--	------------------	---	------------------	--

☺☺☺☺ $\oint_C d\hat{\theta} = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) d\theta = \vec{0}$, $\oint_C d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$

EM.15.10.3

Dva istimena tačkasta naelektrisanja q kreću se paralelno istim brzinama v , međusobnom rastojanju r . U tački gde je jedno od naelektrisanja naći:

- odnos električnog i magnetnog polja,
- razliku električne i magnetne sile.
- Kolika treba da je brzina da bi naelektrisanja zadržala svoje putanje?

**Rešenje**

Biot-Savartov zakon –
polje strujnog elementa.

$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Veza između jačine struje
i brzine naosilaca naelektrisanja.

$$\triangleright I d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq \vec{v}$$

Biot-Savartov zakon –
polje elementarnog naelektrisanja.

$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dq \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Magnetno polje –
maksimalna jačina.

$$\triangleright B_{\max} = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2}$$

Električno polje –
maksimalna jačina.

$$\triangleright E_{\max} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Odnos maksimalnih jačina polja

$$\triangleright \frac{B_{\max}}{E_{\max}} = \epsilon_0 \mu_0 v$$



$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Brzina
svetlosti
u vakuumu

Odnos maksimalnih jačina polja
pomoću brzine svetlosti u vakuumu.

$$\triangleright \frac{B_{\max}}{E_{\max}} = \frac{v}{c^2}$$

Magnetna (Lorentzova) sila

$$\triangleright F_m = q v B$$



Elektromagnetna sila

Coulombova (električna) sila

$$\triangleright F_e = q E$$

Odnos maksimalnih sila

$$\triangleright \frac{F_m}{F_e} = \frac{qv B_{\max}}{q E_{\max}}$$



$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{v^2}{c^2}$$

Rezultantna sila –
razlika sila

$$\triangleright F = F_e - F_m = F_e \left(1 - \frac{F_m}{F_e} \right)$$

Čestice će nastaviti pravolinijsko
kretanje ako se kreću brzinom
svetlosti. U suprotnom će se razići.

$$\triangleright F = F_e \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$



$$F \approx F_e, F_m \ll F_e$$

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

Neka se nosioci naelektrisanja kreću kroz dva paralelna, neograničeno duga provodnika, tada sledi

Električno polje –
podužnog naelektrisanja

$$\triangleright E = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Električna sila na drugi provodnik
po jedinici dužine

$$\triangleright F'_e = q' E = \frac{q'^2}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Magnetno polje –
podužnog naelektrisanja

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 v q'}{2\pi r}$$



$$I = q'v$$

Magnetna sila na drugi provodnik
po jedinici dužine

$$\triangleright F'_m = I B = \frac{\mu_0 q'^2 v^2}{2\pi r}$$



$$I = q'v$$

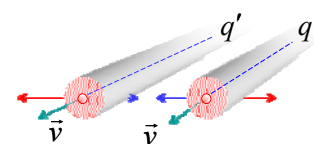
Jačina
struje

Jednakost sila –
čestice se kreću brzinom svetlosti

$$\triangleright \frac{\mu_0 q'^2 v^2}{2\pi r} = \frac{q'^2}{2\pi\epsilon_0 r}$$



$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$



EM.13.09.1

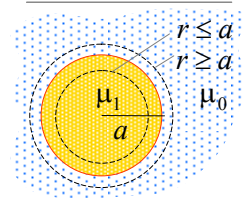
Kroz pravolinijski neferomagnetni linearni provodnik, poluprečnika a i magnetne permeabilnosti μ_1 , protiče stalna struja I . Odrediti:

- a) magnetno polje u svim tačkama prostora,
b) gustine vezanih struja.

Rešenje

Generalisani Ampèreov zakon	$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{S}$			
Magnetitaciono polje u provodniku	$\triangleright H 2r\pi = \frac{I}{a^2\pi} r^2\pi$	$\triangleright \vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi a^2} r \hat{\theta}, r \leq a$		
Magnetitaciono polje u vazduhu	$\triangleright H 2r\pi = \frac{I}{a^2\pi} a^2\pi$	$\triangleright \vec{H}_0 = \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta}, r \geq a$		
Magnetno polje u provodniku	$\triangleright \vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1$	$\triangleright \vec{B}_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi a^2} r \hat{\theta}, r \leq a$	$\triangleleft$	Linearni materijali
Magnetno polje u vazduhu	$\triangleright \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$	$\triangleright \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}, r \geq a$	$\triangleleft$	
Magnetizacija	$\triangleright \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{H} + \vec{M}$	$\triangleright \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H}$		Kod većine provodnika (osim feromagnetika) je $\mu \approx \mu_0$, pa je vrlo približno: $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r, M_1 = 0$
Magnetizacija u provodniku	$\triangleright \vec{M}_1 = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_1 - \vec{H}_1$	$\triangleright \vec{M}_1 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi a^2} r \hat{\theta}, r \leq a$		
Magnetizacija u vazduhu	$\triangleright \vec{M}_0 = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 - \vec{H}_0$	$\triangleright \vec{M}_0 = 0, r \geq a$		

Ampèreove konture



Do istog rezultata se dolazi i na sledeći način

Linearni materijali Magnetna susceptibilnost	$\triangleright \vec{M} = \chi_m \vec{H}$	$\triangleright \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$		
		$\triangleright \chi_m = \frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 = \mu_r - 1$	$\frac{\chi_m \neq 0, \text{ za materijale}}{\chi_m = 0, \text{ za vakuum}}$	
Magnetizacija	$\triangleright \vec{M}_1 = \chi_m \vec{H}_1$ $\vec{M}_0 = 0 \cdot \vec{H}_0$	$\triangleright \vec{M}_1 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi a^2} r \hat{\theta} = \frac{\chi_m I}{2\pi a^2} r \hat{\theta}, r \leq a$		
Površinska gustina vezanih struja	$\triangleright \vec{J}_{Sa} = \vec{M}_1 \times \hat{n} \Big _{r=a}$	$\triangleright \vec{J}_{Sa} = - \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi a} \hat{z} = - \frac{\chi_m I}{2\pi a} \hat{z}$		
Zapreminska gustina vezanih struja	$\triangleright \vec{J}_a = \text{rot } \vec{M}_1$	$\triangleright \vec{J}_a = + \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{\pi a^2} \hat{z} = + \frac{\chi_m I}{\pi a^2} \hat{z}$		
Ukupna jačina vezanih struja	$\triangleright I_a = J_a a^2 \pi + J_{Sa} 2a\pi = 0$	(što mora da bude)		

$$\text{rot } \vec{M} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_r & rM_\theta & M_z \end{vmatrix} \triangleright \text{rot } \vec{M}_1 = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r^2 & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{z} \quad \hat{\theta} \times \hat{n} = -\hat{z} \quad \triangleleft$$

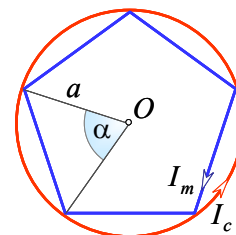
Paramagnetni materijali (na primer, Al, $\mu_r = 1.000022$) imaju pozitivnu susceptibilnost, dok diamagnetni materijali (na primer, Cu, $\mu_r = 0.999994$) imaju negativnu susceptibilnost, pa su gustine vezanih struja suprotnih smerova.

EM.16.01.1

Kroz konturu oblika pravilnog n -tougla protiče stalna struja I_n . Oko mnogougane koture opisana je kružna kontura sa jačinom struje I_c . Poluprečnik opisane kružne konture je a . Jačina magnetnog polja B u zajedničkom centru je jednaka nuli.

a) Odrediti vezu između jačina struja u konturama.

☉ Retultat proveriti za granični slučaj $n \rightarrow \infty$.

**Rešenje**

Biot-Savartov zakon – magnetno polje strujnog elementa.

$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{R}}{R^2} \triangleleft$$

Pomoću trigonometrijskih veza sledi

$$d\theta = \frac{\sin \theta}{R} dl, \quad \frac{1}{R} = \frac{\sin \theta}{r} \quad \triangleright \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \sin \theta d\theta \triangleleft$$

Magnetno polje strujne duži.

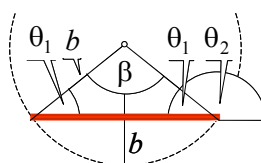
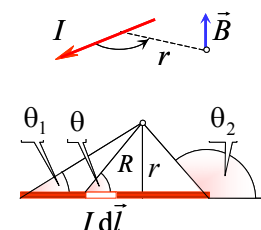
$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad \mathbf{1}$$

Za tačke na osi simetrije je $\theta_2 = \pi - \theta_1$ i $r = b \cos(\beta/2)$, pa sledi

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tan \frac{\beta}{2} \quad \mathbf{2}$$

Magnetno polje na osi simetrije strujne duži.

$$\begin{aligned} \text{Biot-Savartov zakon – magnetno polje kružnog luka, poluprečnika } a \text{ i centralnog ugla } \beta. \\ \triangleright \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} a d\theta \triangleleft \\ B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\beta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \beta \quad \mathbf{3} \end{aligned}$$



$$d\vec{l} = a d\theta \hat{\theta}$$

$$|d\vec{l} \times \hat{r}| = a d\theta$$



☉ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedenih formula.

Magnetno polje u centru kružne konture

$$\triangleright B_c = \frac{\mu_0 I_c}{2a} \quad \leftarrow$$

Magnetno polje (u centru kružnice) jedne stranice pravilnog n -tougla

$$\triangleright B_{1n} = \frac{\mu_0 I_n}{2\pi a} \tan \frac{2\pi}{2n} = \frac{\mu_0 I_n}{2a\pi} \tan \frac{\pi}{n}$$

Magnetno polje (u centru kružnice) $m \leq n$ stranica pravilnog n -tougla

$$B_{mn} = m \frac{\mu_0 I_n}{2a\pi} \tan \frac{2\pi}{2n}$$

Magnetno polje (u centru kružnice) svih stranica pravilnog n -tougla

$$\triangleright B_n = n \frac{\mu_0 I_n}{2a\pi} \tan \frac{2\pi}{2n} = \frac{\mu_0 I_n}{2a} \frac{n}{\pi} \tan \frac{\pi}{n} \quad \leftarrow$$

Struje u kružnici i n -tougla su suprotnih smerova. Jačine polja treba da budu jednake.

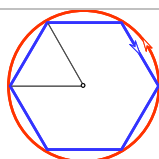
$$\triangleright B_c = B_n \quad \triangleright I_c = I_n \frac{n}{\pi} \tan \frac{\pi}{n}$$

$$\text{Za } n \rightarrow \infty \text{ } n\text{-tougao postaje kružnica} \quad \triangleright I_c = I_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi} \tan \frac{\pi}{n} = I_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos(\pi/n)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/n)}{(\pi/n)} = I_n$$

☉ Na ispitima u različitim rokovima su razmatrani i neki specijalni slučajevi

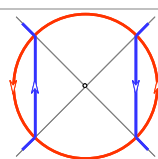
$n = 6$
 $m = 6$

$$I_c = I_n \frac{6}{\pi} \tan \frac{\pi}{6}$$



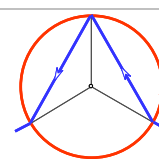
$n = 4$
 $m = 2$

$$I_c = I_n \frac{2}{\pi} \tan \frac{\pi}{4}$$



$n = 3$
 $m = 2$

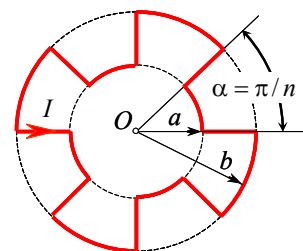
$$I_c = I_n \frac{2}{\pi} \tan \frac{\pi}{3}$$



EM.16.09.1

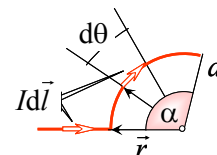
Kontura oblika zupčanika sa n zubaca optočana je stalnom strujom I . Počeci zubaca leže na kružnici poluprečnika a , a njihovi krajevi na kružnici poluprečnika $b \geq a$. Na slici je prikazana kontura za $n = 4$.

- Odrediti jačinu magnetnog polja u tački O .
- Koliko je polje u tački O ako je $a = b$.
- Koliko je polje u tački O ako $n \rightarrow \infty$.

**Rešenje**

Biot-Savartov zakon - magnetno polje strujnog elementa.

$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$



Magnetno polje na osi strujnog elementa

$$\triangleright B = 0$$

$$\triangleleft \begin{aligned} d\vec{l} &= d\vec{r} \\ |d\vec{l} \times \hat{r}| &= 0 \end{aligned}$$

Magnetno polje kružnog luka, poluprečnika a i centralnog ugla α .

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{a^2} \int_0^\alpha d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\alpha}{a}$$

$$\triangleleft \begin{aligned} d\vec{l} &= a d\theta \hat{\theta} \\ |d\vec{l} \times \hat{r}| &= a d\theta \end{aligned}$$

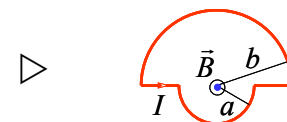
☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.

Magnetno polje u centru date konture stvaraju samo kružni lukovi.

Bez obzira na broj zubaca ukupna dužina luka svih zubaca je uvek ista. Ukupni centralni ugao je uvek isti.

▷ Rezultat ne zavisi od n .

▷ Što je isto kao da je $n = 1$, $\alpha = \pi$



Magnetno polje kružnog luka poluprečnik a , centralni ugao $\alpha = \pi$

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\pi}{a}$$

Magnetno polje kružnog luka poluprečnik b , centralni ugao $\alpha = \pi$

$$B_b = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\pi}{b}$$

$$B = B_a + B_b$$

Magnetno polje kružnog luka poluprečnik a , centralni ugao $\alpha = \pi/n$

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\pi}{na}$$

Magnetno polje kružnog luka poluprečnik b , centralni ugao $\alpha = \pi/n$

$$B_b = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\pi}{nb}$$

$$B = nB_a + nB_b$$

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$$

$a = b$

☺ Dakle, problem je rešen na dva načina.

U slučaju jednakih poluprečnika, $a = b$, dobija se poznat rezultat za magnetno polje u centru kružne strujne konture.

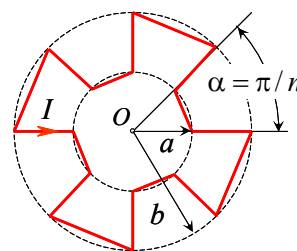
$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

Do istog rezultata se dolazi i direktnom primenom Biot-Savartov zakona.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

EM.16.10.1

Kontura oblika zupčanika sa n zubaca optočana je stalnom strujom I . Počeci zubaca leže na kružnici poluprečnika a , a njihovi krajevi na kružnici poluprečnika $b \geq a$. Na slici je prikazana kontura za $n = 4$.

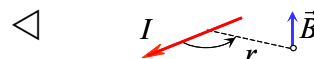


- Odrediti jačinu magnetnog polja u tački O .
- Koliko je polje u tački O ako je $a = b$.
- Koliko je polje u tački O ako je $a = b$ i $n \rightarrow \infty$.

Rešenje

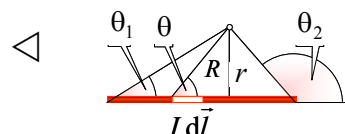
Biot-Savartov zakon -
magnetno polje strujnog elementa.

$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{R}}{R^2}$$



Pomoću trigonometrijskih veza sledi

$$d\theta = \frac{\sin \theta}{R} dl, \quad \frac{1}{R} = \frac{\sin \theta}{r} \quad \triangleright \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \sin \theta d\theta$$



☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.

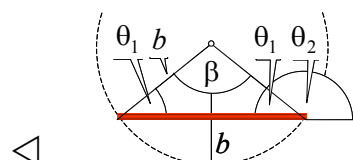
Magnetno polje
na rastojanju r od ose strujne duži.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Za tačke na osi simetrije je $\theta_2 = \pi - \theta_1$ i $r = b \cos(\beta/2)$, pa sledi

Magnetno polje
u tačkama na osi strujne duži.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tan \frac{\beta}{2}$$



☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.

Magnetno polje u centru date konture stvaraju samo tetive unutrašnje i spoljašnje kružnice.

Magnetno polje koje potiče od
tetiva kružnice poluprečnika a .

$$\triangleright B_a = n \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \tan \frac{\pi}{2n}$$

Magnetno polje koje potiče od
tetiva kružnice poluprečnika b .

$$\triangleright B_b = n \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tan \frac{\pi}{2n}$$

Magnetno polje u centru date konture. $\triangleright B = \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] \frac{n \mu_0 I}{2\pi} \tan \frac{\pi}{2n}$

◁ Ako je $a = b$ dobija se
pravilan poligon

Magnetno polje u centru
pravilnog poligona sa $2n$ stranica.

$$\triangleright B = n \frac{\mu_0 I}{\pi a} \tan \frac{\pi}{2n}$$

◁ kad $n \rightarrow \infty$ poligon
degeneriše u kružnicu.

Magnetno polje u centru kružnice.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

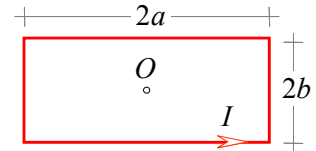
$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\pi} \tan \frac{\pi}{2n} = 1$$

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan x/n}{x/n} = 1$$

EM.13.06.1

Kroz pravougaonu konturu, stranica $2a$ i $2b$, protiče stalna struja I .
Odrediti jačinu magnetnog polja u centru konture i to:

- u opštem slučaju,
- ako je $a = b$, tj kada pravougaonik degeneriše u kvadrat,
- ako je $a \gg b$, tj kada pravougaonik degeneriše u dvožični vod.

**Rešenje**

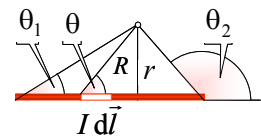
Biot-Savartov zakon -
magnetno polje
trajnog elementa.

$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{R}}{R^2}$$



Pomoću trigonometrijskih veza sledi

$$d\theta = \frac{\sin \theta}{R} dl, \quad \frac{1}{R} = \frac{\sin \theta}{r} \quad \triangleright \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \sin \theta d\theta$$



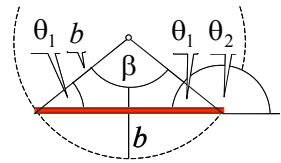
☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.

Magnetno polje
strujne duži.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

1

Za tačke na osi simetrije je $\theta_2 = \pi - \theta_1$ i $r = b \cos(\beta/2)$, pa sledi



Magnetno polje
na osi simetrije strujne
duži.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tan \frac{\beta}{2}$$

2

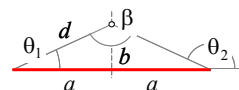
☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.

Manetno polje –
stranica pravougaonika $2a$
pomoću **1** ili **2**

$$\triangleright B_a = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{b\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$\begin{aligned} \tan(\beta/2) &= a/b \\ \cos \theta_1 &= a/d \\ \cos \theta_2 &= -\cos \theta_1 \end{aligned}$$



Manetno polje –
stranica pravougaonika $2b$
pomoću **1** ili **2**

$$\triangleright B_b = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{b}{a\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Za stranicu $2b$
oznake a i b
samo zamene mesta

Magnetno polje –
centar pravougaonika

$$\triangleright B = 2B_a + 2B_b$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Magnetno polje –
centar kvadrata

$$\triangleright a = b, \quad B_a = B_b$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{a},$$

stranica kvadrata je $2a$

Magnetno polje –
na sredini dvožičnog voda

$$\triangleright a \gg b, \text{ tj. } a \rightarrow \infty \\ B_b \rightarrow 0$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{b},$$

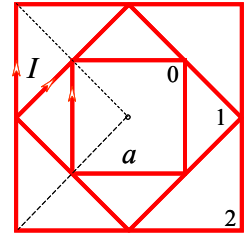
rastojanje provodnika
dvožičnog voda je $2b$

EM.14.04.1

Date su žičane konture oblika kvadrata, kroz koje u istom smeru protiču stalne struje jačina I . Kvadrati su postavljeni tako da temena manjeg kvadrata leže na sredinama stranica većeg kvadrata. Najmanji kvadrat ima stranicu dužine a , tj. poluprečnik opisane kružnice $b = a/\sqrt{2}$.

a) Odrediti jačinu magnetnog polja B u tački centra simetrije.

☺ Uopštiti rezultat za proizvoljan broj n i $n \rightarrow \infty$ kvadrata.

**Rešenje**

Biot-Savartov zakon - magnetno polje strujnog elementa.

$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{R}}{R^2}$$



Pomoću trigonometrijskih veza sledi

$$d\theta = \frac{\sin \theta}{R} dl, \quad \frac{1}{R} = \frac{\sin \theta}{r} \quad \triangleright \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \sin \theta d\theta$$



☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.

Magnetno polje strujne duži.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



Za tačke na osi simetrije je $\theta_2 = \pi - \theta_1$ i $r = b \cos(\beta/2)$, pa sledi

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tan \frac{\beta}{2}$$



☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.

Magnetno polje stranice kvadrata pomoću (1) a je stranica

$$\triangleright r = a/2, \quad \theta_1 = \pi/4, \quad \theta_2 = 3\pi/4 \quad \triangleright \quad B = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mu_0 I}{\pi a}$$

Magnetno polje stranice kvadrata pomoću (2) b je pp opisane kružnice

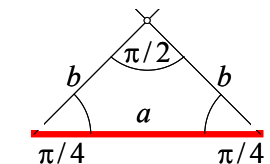
$$\triangleright \beta = \pi/2, \quad (b = a/\sqrt{2}) \quad \triangleright \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

Magnetno polje u centru kvadrata pomoću (1)

$$\triangleright B_0 = 2\sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{\pi a}$$

Magnetno polje u centru kvadrata pomoću (2)

$$\triangleright B_0 = 2 \frac{\mu_0 I}{\pi b}$$



Za magnetno polje u zajedničkom centru više kvadrata upotrebimo, na primer, drugi oblik:

$$\triangleright \text{Za svaki sledeći kvadrat menja se samo pp opisane kružnice} \quad B^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0, \quad B^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} B^{(1)} = \frac{1}{2} B_0, \quad B^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} B^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} B_0$$

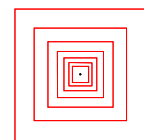
Ukupno magnetno polje ne zavisi od međusobnih položaja kvadrata

$$\triangleright B = B_0 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + \dots \right]$$



Magnetno polje - prva tri kvadrata

$$\triangleright B_3 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} B_0 = (3 + \sqrt{2}) \frac{\mu_0 I}{\pi b}$$



☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu

Očigledno da pp opisanih kružnica formiraju geometrijsku progresiju

$$\triangleright r = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad \text{količnik dva susedna člana}$$

Zbir geometrijske progresije

$$\triangleright \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k = \frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

Magnetno polje - beskonačno mnogo kvadrata

$$\triangleright B = (2 + \sqrt{2}) \frac{\mu_0 I}{\pi b}$$

Geometrijska progresija

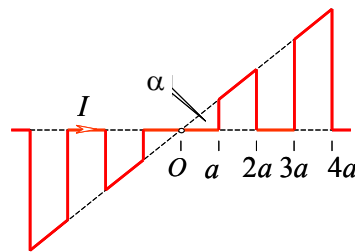
$$S_n = 1 + r + \dots + r^{n-1}$$

$$S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - r}, \quad |r| < 1$$

EM.16.12.1

Kroz konturu oblika testere sa n zubaca protiče stalna struja I . Gornja ivica zubaca poklapa se sa pravom koja sa osom testere gradi ugao α . Na slici je prikazan oblik sa po dva zupca levo i desno od centra konture O .

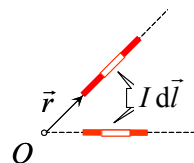


- a) Odrediti jačinu magnetnog polja u centru konture.
 ☺ Odrediti jačinu magnetnog polja u centru konture ako $n \rightarrow \infty$.

Rešenje

Biot-Savartov zakon -
magnetno polje strujnog elementa.

$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$



Magnetno polje
na osi strujnog elementa

$$\triangleright B = 0$$



$$d\vec{l} = d\vec{r} \\ |d\vec{l} \times \hat{r}| = 0$$

Magnetno polje
na rastojanju r od ose strujne duži.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



$$\theta_1 = \pi/2 \\ \theta_2 = \pi/2 + \alpha$$

☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.

Magnetno polje u centru date konture stvaraju samo vertikalni elementi.

Magnetno polje
jedne vertikalne ivice date konture.

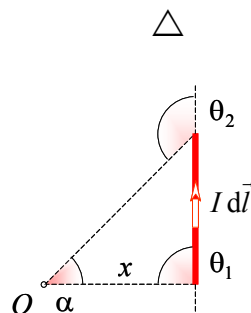
$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \sin \alpha$$

Magnetno polje
para simetričnih vertikalnih ivica.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \sin \alpha$$

Magnetno polje
svih vertikalnih ivica, $x = a, 2a, 3a, \dots$

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sin \alpha \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \right]$$



☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu

Taylorov red

$$\triangleright f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

Taylorov red
u okolini $a = 0$

$$\triangleright f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(0)x^n}{n!}$$

Taylorov red
funkcije $f(x) = \ln(1+x)$

$$\triangleright \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad |x| \leq 1, x \neq -1$$

Za $x = 1$

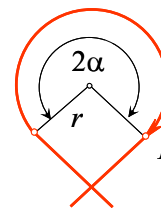
$$\triangleright \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Magnetno polje
svih vertikalnih ivica, $x = a, 2a, 3a, \dots$

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sin \alpha \ln 2$$

EM.15.09.1

Strujna kontura se sastoji od kružnog luka, poluprečnika r i centralnog ugla 2α , i dve poluprave koje tangiraju kružni luk na njegovim krajevima. Kroz konturu protiče stalna struja I .



- a) Odrediti jačinu magnetnog polja u tački O .
 b) Objasniti rezultate za $\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$ i $\alpha = \pi$.

Rešenje

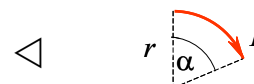
Biot-Savartov zakon -
magnetno polje strujnog elementa.

$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$



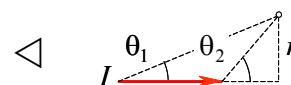
Magnetno polje
kružnog luka, poluprečnika r .

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \alpha$$



Magnetno polje
na rastojanju r od ose strujne duži.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedenih formula.

Magnetno polje
na rastojanju r od početka poluprave.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

$$\triangleleft \theta_1 = \pi/2, \theta_2 = \pi$$

Magnetno polje
dve polovine luka i dve poluprave.

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi r} + 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (1 + \alpha)$$

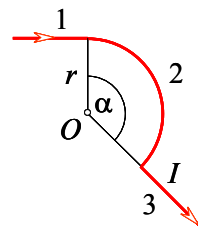
◀ Magnetno polje
date konture.

Strujna kontura se sastoji od dve poluprave, koje u magnetnom smislu čine jednu pravu, i dela kružnice. Magneto polje je uvek usmereno u ravan crteža.

Poluprava + Poluprava = Prava	Poluprava + polukružnica + poluprava	Poluprava + kružnica + poluprava
$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{4r}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2r}$
Dve poluprave se u geometrijskom i magnetnom smislu spajaju u jednu pravu.	Dve poluprave na suprotnim stranama sa suprotnim smerovima struja daju polje kao i jedna prava.	☺ Kroz dve poluprave struja je suprotnog smera, ali je i tačka sa druge strane. Smer polja se ne menja.

EM.16.03.2

Strujna kontura se sastoji od kružnog luka, poluprečnika r i centralnog ugla α , i dve poluprave od kojih jedna tangira kružni luk na njegovom početku, a druga na njegovom kraju je u radijacionom pravcu. Kroz konturu protiče stalna struja I .



- a) Odrediti jačinu magnetnog polja u tački O , tj. centru kružnog luka.
 b) Objasniti rezultate za $\alpha = 0$, $\alpha = 2\pi$ i $\alpha > 2\pi$.

Rešenje

Magnetno polje –
Biot-Savartov zakon

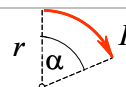
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$



☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedenih formula.

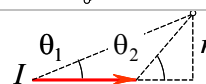
Magnetno polje –
kružnog luka, 2.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \alpha$$



Magnetno polje –
na rastojanju a od ose strujne duži..

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



Magnetno polje –
poluprave u pravcu tangente, 1.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

$$\triangleleft \theta_1 = \pi/2, \theta_2 = \pi$$

Magnetno polje –
poluprave radijalnom pravcu, 3.

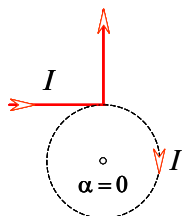
$$\triangleright B = 0$$

$$\triangleleft \theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi$$

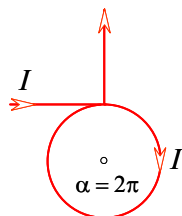
Magnetno polje –
celog sistema.

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} 1 + \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (1 + \alpha)$$

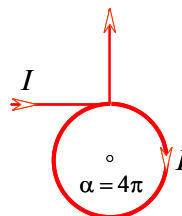
▽ Zavisnost jačine magnetnog polja od vrednosti centralnog ugla kružnog luka



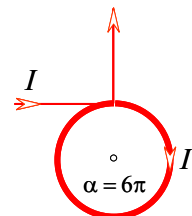
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} 1 + \frac{\mu_0 0I}{2 r}$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} 1 + \frac{\mu_0 1I}{2 r}$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} 1 + \frac{\mu_0 2I}{2 r}$$

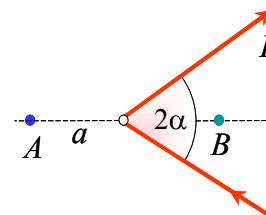


$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} 1 + \frac{\mu_0 3I}{2 r}$$

EM.16.12.1

Beskonačno dug provodnik, kroz koji protiče stalna struja I , savijen je (kao na slici) tako da kraci grade ugao 2α . Tačke A i B nalaze se na simetrali ugla i na rastojanju a od temena.

- Odrediti magnetno polje u tački A .
- Odrediti magnetno polje u tački B .
- Koji rezultat se dobija za $\alpha = \pi/2$.
- Skicirati funkciju po kojoj se polje menja u zavisnosti od ugla α .

**Rešenje**

Biot-Savartov zakon -
magnetno polje strujnog elementa.

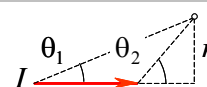
$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$



☺ Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.

Magnetno polje
na rastojanju r od ose strujne duži.

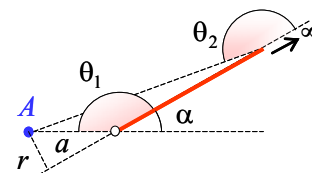
$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad \triangleleft$$



Magnetno polje
u tačka A od jednog (gornjeg) kraka.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\triangleleft \begin{aligned} \theta_1 &= \pi - \alpha \\ \theta_2 &= \pi \\ r &= a \sin\alpha \end{aligned} \quad \triangleleft$$



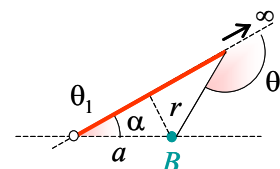
Magnetno polje
u tačka A od oba kraka.

$$\triangleright B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \tan \frac{\alpha}{2}$$

Magnetno polje
u tački B od jednog (gornjeg) kraka.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}$$

$$\triangleleft \begin{aligned} \theta_1 &= \alpha \\ \theta_2 &= \pi \\ r &= a \sin\alpha \end{aligned} \quad \triangleleft$$



Magnetno polje
u tački B od oba kraka.

$$\triangleright B_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cot \frac{\alpha}{2}$$

Za $\alpha = \pi/2$ kraci su kolinearni i
dobija se magnetno polje strujne niti.

$$\triangleright B_A = B_B = B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \triangleleft$$

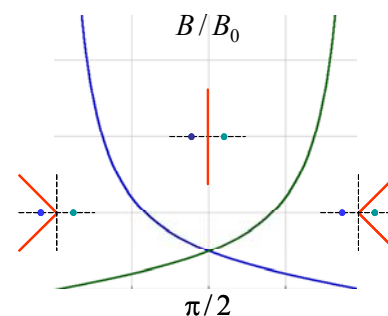
Biot-Savartov zakon

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu

Prikazani su grafici promene magnetnog polja
u tačkama A i B u funkciji ugla koji zaklapaju
poluprave optičane stalnom strujom.

Magnetno polje
u tački A —

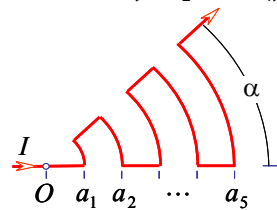
Magnetno polje
u tački B —



EM.15.10.2

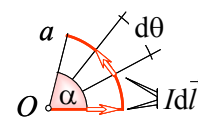
Kontura optočena stalnom strujom I se sastoji od koncentričnih kružnih lukova i radijalnih segmenata koji spajaju kraj jednog luka sa početkom sledećeg. Centralni ugao lukava je α , a poluprečnici su $a_1, a_2, \dots, a_n$. U centru sistema O odrediti

- jačinu magnetnog polja,
- jačinu magnetnog polja ako je $a_i = ia, i = 1, n$
- smer magnetnog polja,
- 😊 jačinu magnetnog polja ako je $a_i = ia, i = 1, n$ i $n \rightarrow \infty$.

**Rešenje**

Biot-Savartov zakon -
magnetno polje strujnog elementa.

$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$



Magnetno polje
na osi strujnog elementa

$$\triangleright B = 0$$



$$d\vec{l} = d\vec{r} \\ |d\vec{l} \times \hat{r}| = 0$$

Magnetno polje
kružnog luka, poluprečnika a i
centralnog ugla α .

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{a^2} \int_0^\alpha d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\alpha}{a}$$



$$d\vec{l} = a d\theta \hat{\theta} \\ |d\vec{l} \times \hat{r}| = a d\theta$$

😊 Na ispitu se priznaje upotreba već izvedene formule.

Magnetno polje u centru date konture stvaraju samo kružni lukovi.

Magnetno polje i -tog kružnog
luka.

$$\triangleright B_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\alpha}{a_i}$$

Magnetno polje svih lukova.

$$\triangleright B = \sum_{i=1}^n B_i = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots \right)$$

Magnetno polje
svih kružnih lukova ako je $a_i = ia$

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} \right)$$

Magnetno polje je usmereno od ravni slike i određeno je smerom struje u prvom kružnom luku. Doprinos sledećeg luka je manji, i tako dalje.

😊 Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu

Magnetno polje
svih kružnih lukova ako $n \rightarrow \infty$

$$\triangleright B = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi a} \ln 2$$



Taylorov red

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(0)x^n}{n!}$$

▽

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

$$-1 < x \leq 1$$

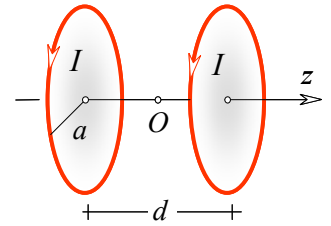
$$x = 1 \quad \nabla$$

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

EM.15.09.1

Dva kružna koaksijalna obruča jednakih poluprečnika a se nalaze na međusobnom rastojanju d . Kroz obruče teku stalne struje istog smera i iste jačine I . Odrediti jačinu magnetnog polja

- u centru sistema O ,
 - u centru sistema O , ako je $d = a$.
- ☺ Skicirati grafik promene magnetnog polja u aksijalnom pravcu.

**Rešenje**

Biot-Savartov zakon -
magnetno polje strujnog elementa.

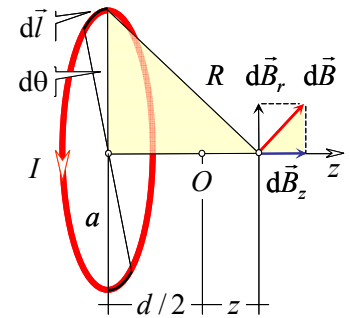
$$\triangleright d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{R}}{R^2}$$

U tačkama na osi polje ima samo z komponentu.

$$\triangleright \frac{dB_z}{dB} = \frac{a}{R} = \cos(\vec{a}, \vec{R})$$

Komponente polja u radijalnom pravcu se anuliraju.

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= a d\theta \hat{\theta} \\ |\vec{dl} \times \hat{R}| &= a d\theta \end{aligned} \quad \triangleright \quad dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a d\theta}{R^2} \frac{a}{R}$$



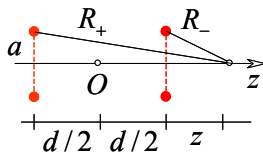
Magnetna polja svakog od obruča posebno. Centri obruča su pomereni u odnosu na koordinatni početak.

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{R^3} \int_0^{2\pi} d\theta \quad \triangleright \quad \begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{a^3}{[a^2 + (z + d/2)^2]^{3/2}} &< \quad R = \sqrt{a^2 + (z + d/2)^2} \\ B_z &= \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{a^3}{[a^2 + (z - d/2)^2]^{3/2}} &< \quad R = \sqrt{a^2 + (z - d/2)^2} \end{aligned}$$

Magnetna polja
u centru svakog od obruča

$$\triangleright B_0 = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad \triangleleft \quad z = \pm d/2$$

Magnetna polja oba obruča se sabiraju jer su smerovi struja isti.



$$\triangleright B_z(z) = B_0 \left(\frac{a^3}{[a^2 + (z + d/2)^2]^{3/2}} + \frac{a^3}{[a^2 + (z - d/2)^2]^{3/2}} \right)$$

$$z = 0 \quad \triangleright \quad B_z(z) = B_0 \frac{2a^3}{[a^2 + (d/2)^2]^{3/2}} \quad \triangleleft \quad \text{Magnetno polje u centru sistema}$$

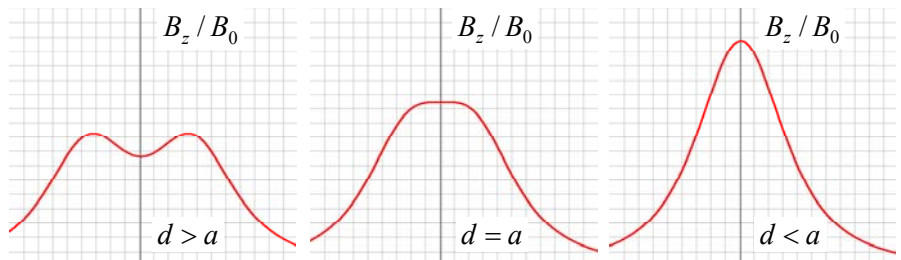
$$z = 0, d = a \quad \triangleright \quad B_z = B_0 \frac{16}{5\sqrt{5}} \quad \triangleleft \quad \text{Magnetno polje u centru sistema, } d = a.$$

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

Jedino za rastojanje

$$d = a$$

magnetno polje između obruča je u najvećem delu homogeno. Za to rastojanje obruči čine *Helmholtzov* par.

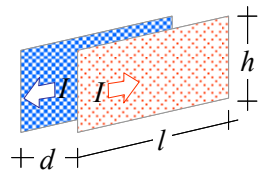


EM.13.10.2

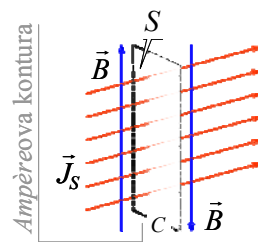
Prenosna linija sastoji se od dva veoma duga paralelna trakasta provodnika jednakih širina h , koja se nalaze na međusobnom rastojanju $d \ll h$. Linija je priključena na jednosmerni napon.

Naelektrisanja su po površinama traka ravnomerno raspoređena i kreću se stalnim brzinama u suprotnim smerovima formirajući tako dva strujna plašta. Odrediti:

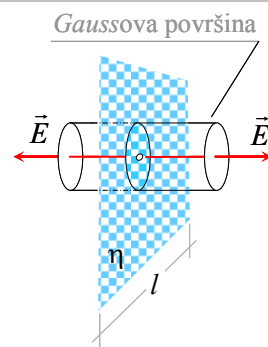
- podužnu induktivnost L' ,
- podužnu kapacitivnost C' .
- Pokazati da je proizvod $L'C'$ konstantan.

**Rešenje**

Magnetno polje	Ampèrev zakon	$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S}$	
	Magnetno polje strujne ravni (plašt)	$\triangleright 2Bh = \mu_0 J_S h$	$\triangleright B = \frac{1}{2} \mu_0 J_S$
	Magnetno polje između dve ravni	$\triangleright B = \mu_0 J_S$	
	Površinska gustina struje	$\triangleright J_S = \frac{I}{h}$	$\triangleright B = \mu_0 \frac{I}{h}$
	Energija magnetnog polja 1	$\triangleright W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV$	$\triangleright W_m = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{h} \right)^2 d l h = \frac{\mu_0}{2} I^2 \frac{d l}{h}$
	Energija (induktora) magnetnog polja 2	$\triangleright W_m = \frac{1}{2} L I^2$	$\triangleright \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0}{2} I^2 \frac{d l}{h}$
	Podužna induktivnost	$\triangleright L' = \frac{L}{l} = \mu_0 \frac{d}{h}$	



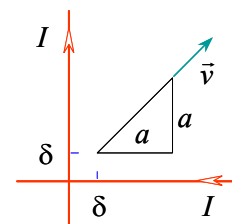
Električno polje	Gaussov zakon	$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \eta dS$	
	Električno polje naelektrisanе ravni	$\triangleright 2ES = \frac{\eta S}{\epsilon_0}$	$\triangleright E = \frac{\eta}{2\epsilon_0}$
	Električno polje između dve ravni	$\triangleright E = \frac{\eta}{\epsilon_0}$	
	Površinska gustina naelektrisanja	$\triangleright \eta = \frac{q}{hl}$	$\triangleright E = \frac{q}{\epsilon_0 hl}$
	Energija električnog polja 1	$\triangleright W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV$	$\triangleright W_e = \frac{1}{2\epsilon_0} q^2 \frac{d}{hl}$
	Energija (kondenzatora) električnog polja 2	$\triangleright W_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$	$\triangleright \frac{1}{2\epsilon_0} q^2 \frac{d}{hl} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
	Podužna kapacitivnost	$\triangleright C' = \frac{C}{l} = \epsilon_0 \frac{h}{d}$	



Proizvod podužnih karakteristika $\triangleright L'C' = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \triangleleft c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, brzina svetlosti u vakuumu.

EM.17.02.1

Kroz dva pravolinijska provodnika, ukrštena pod pravim uglom, protiču stalne struje I . Žičana kontura oblika pravouglog jednakokrakog trougla katete a postavljena je tako da pravac hipotenuze zaklapa uglove od $\pi/4$ sa oba provodnika. Teme konture koje je najbliže mestu ukrštanja provodnika nalazi se na rastojanju δ od oba provodnika (kao na slici). Kontura se od početnog položaja udaljava brzinom v u pravcu koji ima hipotenuzu. Odrediti indukovanu elektromotornu silu u konturi.

**Rešenje**

Elektromotorna sila – Faradayev zakon	$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{d\delta} \frac{d\delta}{dt} - \frac{d\Phi_2}{d\delta} \frac{d\delta}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{d\delta} v_x - \frac{d\Phi_2}{d\delta} v_y$
---------------------------------------	--

Udeo vertikalnog provodnika	$\Phi_1 = \int_{\delta}^{\delta+a} B(x) dS(x)$
-----------------------------	--

Magnetno polje – Biot – Savartov zakon	$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$
--	---------------------------------

Površina konture	$h(x) = x - \delta, \quad dS(x) = (x - \delta) dx$
------------------	--

Fluks	$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(a - \delta \ln \frac{\delta+a}{\delta} \right)$
-------	---

Izvod fluksa po pomeraju	$\frac{d\Phi_1}{d\delta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{a}{\delta+a} - \ln \frac{\delta+a}{\delta} \right)$
--------------------------	--

Udeo horizontalnog provodnika	$\Phi_2 = \int_{\delta}^{\delta+a} B(y) dS(y)$
-------------------------------	--

Magnetno polje – Biot – Savartov zakon	$B(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$
--	---------------------------------

Površina konture	$h(y) = a + \delta - y, \quad dS(y) = (a + \delta - y) dy$
------------------	--

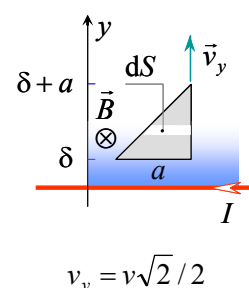
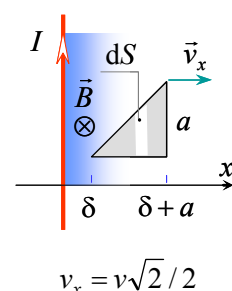
Fluks	$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-a + \delta \ln \frac{\delta+a}{\delta} + a \ln \frac{\delta+a}{\delta} \right)$
-------	--

Izvod fluksa po pomeraju	$\frac{d\Phi_2}{d\delta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{a}{\delta+a} + \ln \frac{\delta+a}{\delta} - \frac{a^2}{\delta(\delta+a)} \right)$
--------------------------	--

Komponente brzina su jednake	$\varepsilon = -\left(\frac{d\Phi_1}{d\delta} + \frac{d\Phi_2}{d\delta} \right) \frac{v\sqrt{2}}{2}$	$\triangleleft$	$v_x = v_y = v \frac{\sqrt{2}}{2}$
------------------------------	---	-----------------	------------------------------------

Indukovana elektromotorna sila	$\varepsilon = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a^2}{\delta(\delta+a)} \frac{v\sqrt{2}}{2}$
--------------------------------	---

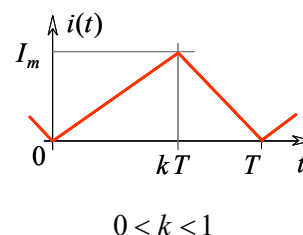
Smer indukovane struje za date smerove struja u provodnicima	$\triangleright$ Udaljavanjem od provodnika magnetno polje slabi. Indukovana ems ima takav smer da se protivi promeni. Indukovana struja u konturi ima smer koji pojačava polje, tj. smer kazaljki na satu.
--	---



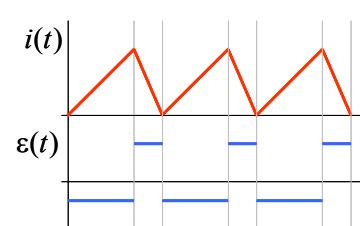
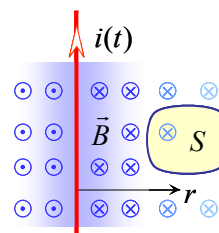
EM.16.01.1

Kroz prav neograničeno dug provodnik protiče promenljiva struja $i(t)$, učestanosti f i amplitude I_m , čiji je talasni oblik dat na slici. Žičana kontura površine S nalazi se na rastojanju $r \gg \sqrt{S}$ od provodnika tako da se može smatrati da je jačina magnetnog polja u okolini konture stalna. Odrediti indukovanu elektromotornu silu u konturi.

Numerički podaci: $I_m = 10\text{A}$, $r = 1\text{m}$, $S = 0.01\text{m}^2$, $f = 50\text{Hz}$

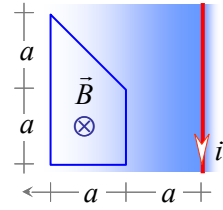
**Rešenje**

Fluks	$\triangleright \Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = BS$			
Magnetno polje – Biot – Savartov zakon	$\triangleright B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$			
Indukovana ems – Faradayev zakon	$\triangleright \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 S}{2\pi r} \frac{di}{dt}$			
Jednačina talasnog oblika prava kroz dve tačke	$\triangleright i - i_1 = \frac{i_2 - i_1}{t_2 - t_1} (t - t_1)$			
Nastajanje struje	$\triangleright A(0,0), B(kT, I_m)$	$\triangleright i = \frac{1}{k} I_m \frac{t}{T}$	$\triangleleft 0 \leq t \leq kT$	
Nestajanje struje	$\triangleright B(kT, I_m), C(T,0)$	$\triangleright i = \frac{1}{1-k} I_m \left(1 - \frac{t}{T}\right)$	$\triangleleft kT \leq t \leq T$	
Indukovana ems	$\triangleright \varepsilon = \frac{\mu_0 S I_m}{2\pi r T} \begin{cases} \frac{-1}{k}, & 0 \leq t \leq kT \\ \frac{1}{1-k}, & kT \leq t \leq T \end{cases}$			
Numerički primer	$\triangleright \frac{\mu_0 S I_m}{2\pi r T} = 1\text{mV}$			



EM.16.10.2

Kroz neograničeno dug i prav provodnik u trenutku $t=0$ struja počinje da nestaje po zakonu $i(t) = I_0 e^{-kt}$, $k = \text{const.} \gg 1$. Pored provodnika se nalazi nepomična žičana kontura oblika, dimenzija i položaja kao na slici. Otpornosti konture je R . Odrediti:



- zakon promene indukovane struje u konturi,
- smer (u smeru kazaljki na satu ili suprotno) indukovane struje.

Rešenje

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

$$\Phi = \int B dS$$

$$\triangleright i_{in} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{k}{R} \Phi$$

$$i(t) = I_0 e^{-kt}$$

$$\frac{di}{dt} = -k I_0 e^{-kt} = -ki$$

1 $\triangleright dS = b dx$

$$\triangleright \Phi_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \ln \frac{x_0 + a}{x_0}$$

$$x_0 = b = a \triangleright dS = a dx$$

$$\triangleright \Phi_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln 2$$

2 $\triangleright dS = \frac{b}{a} (x - x_0) dx$

$$\triangleright \Phi_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \left(1 - \frac{x_0}{a} \ln \frac{x_0 + a}{x_0} \right)$$

$$x_0 = b = a \triangleright dS = (x - a) dx$$

$$\triangleright \Phi_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a (1 - \ln 2)$$

3 $\triangleright dS = \left(b - \frac{b}{a} (x - x_0) \right) dx$ $\triangleright \Phi_3 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \left(-1 + \left(1 + \frac{x_0}{a} \right) \ln \frac{x_0 + a}{x_0} \right)$

$$x_0 = b = a \triangleright dS = (2a - x) dx$$

$$\triangleright \Phi_3 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a (-1 + 2 \ln 2)$$

4 $\triangleright \Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$ $\triangleright \Phi_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln 2$

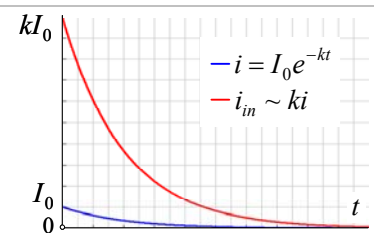
5 $\triangleright \Phi_5 = \Phi_1 + \Phi_2$ $\triangleright \Phi_5 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a$ $\triangleright i_{in} = \frac{k}{R} \Phi_5$

6 $\triangleright \Phi_6 = \Phi_1 + \Phi_3$ $\triangleright \Phi_6 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a (-1 + 3 \ln 2)$ $\triangleright i_{in} = \frac{k}{R} \Phi_6$

$\triangleright$ Smer indukovane struje ima smer kazaljki na satu.

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

U slučaju naglog nestanka struje u provodniku ($k \gg 1$) indukovana elektromotorna sila (struja) može da ima veoma velike vrednosti i to je glani uzrok skoka varnice prilikom isključivanja uređaja.

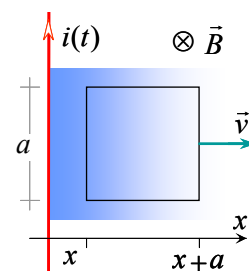


EM.17.04.1

Kroz pravolinijski provodnik protiče promenljiva struje $i(t) = I_m e^{-kt}$, $k > 1$. Paralelno sa provodnikom, na rastojanju x , nalazi se žičana kontura oblika kvadrata, stranice a .

Kontura se stalnom brzinom v udaljava od početnog položaja po pravcu koji je normalan na provodnik. Odrediti elektromotornu silu u konturi

- indukovanu usled promene polja,
- indukovanu usled kretanja konture.
- Odrediti odnos indukovanih komponenti.
- Numerički podaci: $I_m = 1\text{ A}$, $k = 1\text{ Hz}$, $x = a = 1\text{ m}$, $v = 1\text{ m/s}$.

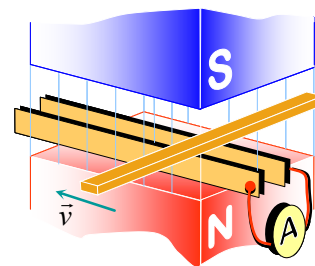
**Rešenje**

Elektromotorna sila – <i>Faradayev zakon</i>	▷	$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt}\right) = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x} v$	
		Statička indukcija	Dinamička indukcija
Magnetno polje – <i>Biot – Savartov zakon</i>	▷	$B(x,t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} \frac{1}{x}$	
Fluks	▷	$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$	◁ $dS = a dx$
Fluks	▷	$\Phi(x,t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} a \int_x^{x+a} \frac{dx}{x}$	▷ $\Phi(x,t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} a \ln \frac{x+a}{x}$
Statička indukcija	▷	$\varepsilon_s = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{2\pi} a \ln \frac{x+a}{x} \frac{di}{dt} = +\frac{\mu_0}{2\pi} a \ln \frac{x+a}{x} k I_m e^{-kt}$	
Dinamička indukcija	▷	$\varepsilon_d = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} v = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{a^2}{x(x+a)} v i = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{a^2}{x(x+a)} v I_m e^{-kt}$	
Ukupna indukovana elektromotorna sila	▷	$\varepsilon(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} \left(ak \ln \frac{x+a}{x} - v \frac{a^2}{x(x+a)} \right)$	
Odnos indukovanih komponenti	▷	$\left \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_d} \right = \frac{k}{v} \frac{x(x+a)}{a} \ln \frac{x+a}{x}$	
Numerički primer	▷	$\left \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_d} \right = 2 \ln 2$	

EM.16.03.1

Dve paralelne provodne šine, zanemarljive otpornosti i međusobnog rastojanja a nalaze se poprečnom homogenom magnetnom polju jačine B . Provodnik koji kratkospaja šine ima otpornost R i pod dejstvom vučne sile klizi bez trenja stalnom brzinom v . Odrediti

- indukovanu elektromotornu silu,
- vučnu silu koja je potrebna za kretanje provodnika,
- bilans snaga.
- Numerički podaci: $B = 1 \text{ mT}$, $R = 1 \Omega$, $v = 1 \text{ m/s}$, $h = 0.1 \text{ m}$

**Rešenje**

Elektromotorna sila – Faradayev zakon	$\triangleright \quad \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$	$\triangleright \quad \varepsilon = -\frac{d}{dt}(BS) = -B\frac{d}{dt}(hx) = -hB\frac{dx}{dt} = -hBv$
---------------------------------------	--	---

Jačina struje – Ohmov zakon	$\triangleright \quad I = \frac{\varepsilon}{R}$	$\triangleright \quad I = \frac{hBv}{R}$
-----------------------------	--	--

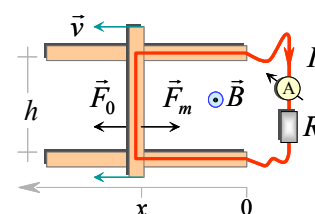
Smer struje – Lenzov zakon	$\triangleright$	Smer kazaljki na satu. Magnetna sila je u ravnoteži sa vučnom silom.
----------------------------	------------------	--

Magnetna sila – Lorentzov zakon	$\triangleright \quad \vec{F}_m = I \vec{h} \times \vec{B}$	$\triangleright \quad F_m = IhB = \frac{(hB)^2 v}{R}$
---------------------------------	---	---

Električna snaga – Jouleov zakon	$\triangleright \quad P_J = \varepsilon I$	$\triangleright \quad P_J = \frac{(hBv)^2}{R}$
----------------------------------	--	--

Mehanička snaga – rad u jedinici vremena	$\triangleright \quad P_M = \frac{d}{dt}(F_m x)$	$\triangleright \quad P_M = F_m v = \frac{(hBv)^2}{R}$
--	--	--

Numerički primer	$\triangleright \quad \varepsilon = 0.1 \text{ mV}, P_M = P_J = 10 \mu\text{W}$
------------------	---



☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

U jednom trenutku ($t = 0$) vučna sila prestane da deluje, $F_0 = 0$. Klizač nastavlja kretanje po inerciji sve dok ga magnetna sila ne zaustavi. Neka je masa klizača m .

Ravnoteža sila	$\triangleright \quad F_m + ma = 0$	$\triangleleft \quad F_m = \frac{(hB)^2 v(t)}{R}$	1
----------------	-------------------------------------	---	----------

Jednačina kretanja	$\triangleright \quad \frac{(hB)^2}{R} v(t) + m \frac{dv(t)}{dt} = 0$	$\triangleright \quad \frac{dv(t)}{dt} + \frac{(hB)^2}{mR} v(t) = 0$	$\triangleright \quad \frac{dv}{dt} + Cv = 0$
--------------------	---	--	---

Rešavanje diferencijalne jednačine	$\triangleright \quad \frac{dv(t)}{v(t)} = -C dt$	$\triangleright \quad \ln v(t) = -Ct + C_1$	$\triangleleft \quad \text{za } t = 0 \text{ je } v(t) = v$
------------------------------------	---	---	---

$C = \frac{(hB)^2}{mR}$	$\triangleright \quad \ln v(t) = -Ct + \ln v$	$\triangleright \quad \ln \frac{v(t)}{v} = -Ct$	$\triangleright \quad v(t) = v e^{-Ct}$
-------------------------	---	---	---

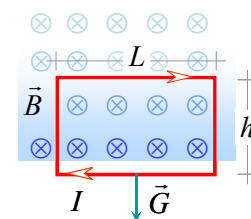
Konačno rešenje	$\triangleright \quad v(t) = v e^{-\frac{(hB)^2}{mR} t}$	$\varepsilon(t) = -hBv(t)$	$I(t) = \frac{hB}{R} v(t)$
-----------------	--	----------------------------	----------------------------

Električna energija	$\triangleright \quad W = R \int_0^\infty I^2(t) dt = \frac{(hB)^2}{R} v^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{(hB)^2}{mR} t} dt = \frac{1}{2} m v^2$	$\triangleleft \quad \text{Kinetička energija}$
---------------------	--	---

EM.15.09.1

Pravougaona kontura, dimenzija $h \times L$ i mase m , kroz koju protiče struja stalne jačine I slobodno visi tako da se delimično nalazi u poprečnom homogenom magnetnom polju jačine B . Odrediti

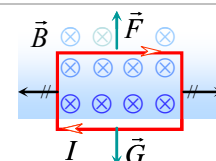
- a) jačinu struje tako da kontura lebdi,
 ☺ brzinu pada konture kada se struja prekine (otpornost konture je R).

**Rešenje**

Sila težine Newtonov zakon	$\triangleright \vec{G} = m\vec{g}$	$\triangleleft \vec{g} = -g\hat{z}$	$\triangleleft$	
Magnetna sila Loretzov zakon	$\triangleright d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$	$\triangleleft \vec{B} = -B\hat{x}$	$\triangleleft$	
Magnetna sila leva ivica	$\triangleright \vec{F} = -IhB\hat{y}$	$\triangleleft \hat{z} \times (-\hat{x}) = -\hat{y}$	$\triangleleft$	
Magnetna sila desna ivica	$\triangleright \vec{F} = +IhB\hat{y}$	$\triangleleft -\hat{z} \times (-\hat{x}) = \hat{y}$	$\triangleleft$	
Magnetna sila gornja ivica	$\triangleright \vec{F} = +ILB\hat{z}$	$\triangleleft \hat{y} \times (-\hat{x}) = \hat{z}$	$\triangleleft$	
Magnetna sila donja ivica, $B = 0$	$\triangleright \vec{F} = -ILB\hat{z} = \vec{0}$	$\triangleleft -\hat{y} \times (-\hat{x}) = -\hat{z}$	$\triangleleft$	
Ravnoteža sila	$\triangleright \sum \vec{F} = 0$	$\triangleright \vec{F} = (ILB - mg)\hat{z} = 0$	$\triangleright$	$I = mg / LB$

☺ Ovaj deo zadatka nije tražen na ispitu.

Kretanjem konture na dole indukuje se struja takvog smera da magnetna sila podiže konturu. Priraštaj fluksa je negativan i indukovana ems se protivi toj promeni.



Ravnoteža sila	$\triangleright \sum \vec{F} = 0$	$\triangleright \vec{F} + m\vec{a} = m\vec{g}$	
Indukovana struja i elektromotorna sila	$\triangleright \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$	$\triangleright \varepsilon = -B \frac{d}{dt}(hL)$	$\triangleright \varepsilon = LBv, I = \frac{LBv}{R}$
Magnetna sila	$\triangleright F = ILB$	$\triangleright F = \frac{(LB)^2 v}{R}$	
Jednačina kretanja (ODJ prvog reda)	$\triangleright \frac{(LB)^2}{R}v + m \frac{dv}{dt} = mg$	$\triangleright v \frac{(LB)^2}{mR} + \frac{dv}{dt} = g$	$C = \frac{(LB)^2}{mR}$
Homogeni deo	$\triangleright \frac{dv}{dt} + Cv = 0$	$\triangleright \ln v = -Ct + \ln C_1$	$\triangleright v = C_1 e^{-Ct}$
Varijacija konstante	$\triangleright C_1 = C_1(t)$	$\triangleright \frac{dv}{dt} = \frac{dC_1}{dt} e^{-Ct} - C_1 C e^{-Ct}$	
Nehomogeni deo (konstanta C_1)	$\triangleright \frac{dC_1}{dt} e^{-Ct} - C_1 C e^{-Ct} + C_1 C e^{-Ct} = g$		$\triangleright C_1 = \frac{g}{C} e^{Ct} + C_2$
Opšte rešenje (konstanta C_2)	$\triangleright v = C_1 e^{-Ct} = \left(\frac{g}{C} e^{Ct} + C_2 \right) e^{-Ct} = \frac{g}{C} + C_2 e^{-Ct}$	$\triangleleft$	za $t = 0$ je $v = 0$
Konačno rešenje	$\triangleright C_2 = -\frac{g}{C}$	$\triangleright v = \frac{g}{C} (1 - e^{-Ct})$	$\triangleleft C = \frac{(LB)^2}{mR}$

ES.16.10.1	3	Električno polje dipola opada sa trećim stepenom – Polje električnog dipola
ES.15.10.3	4	Elektroskop – Elektrostatika sila
ES.16.01.1	5	Najmanje električno polje između dva istoimena tačkasta naelektrisanja – Elektrostatika ravnoteža
ES.16.10.1	6	Takasto naelektrisanje na osi naelektrisanog kružnog obruča – Elektrostatika ravnoteža
ES.15.10.3	7	Gromobransko užje – Teorema lika u ravnom ogledalu
ES.13.01.1	8	Rasprskavanje naelektrisanog mehura – Održanje količine naelektrisanja
ES.12.01.1	9	Sjedinjavanje naelektrisanih kapljica – Održanje količine naelektrisanja
ES.15.10.2	10	Rad elektrostatičkih sila u koaksijalnom vodu – Nezavisnost potencijala od puta integracije
ES.13.10.1	11	Podužna kapacitivnost dvožičnog voda i napon proboja – Kapacitivnost
ES.16.10.2	12	Električno polje kružnog prstena (ploča, ravan i obruč) – Električno polje
ES.14.03.2	13	Koaksijalni kružni obruč – Električno polje
ES.16.06.1	14	Koaksijalni kružni obruč – Homogeno električno polje
ES.14.01.1	15	Naelektrisana nit konačne dužine – Električno polje
ES.13.03.2	16	Naelektrisana poluprava – Električno polje
ES.17.03.2	17	Naelektrisana nit oblika ukosnice – Električno polje
ES.15.09.1	18	Električno polje u ekscentričnoj šupljini – Homogeno električno polje
ES.12.06.1	19	Zapreminski (površinski) homogeno naelektrisana sfera – Energija električnog polja
ES.12.09.1	20	Tačkasto naelektrisanje u dielektričnoj lopti – Vezana naelektrisanja
ES.12.10.1	21	Naelektrisana lopta sa dielektričnim omotačem – Vezana naelektrisanja
ES.12.12.1	22	Tačkasto naelektrisanje iznad dielektričnog poluprostora – Generalisana teorema lika
ES.15.10.2	23	Naelektrisana lopta u homogenom dielektriku – Vezana naelektrisanja
ES.16.06.1	24	Tačkasto naelektrisanje na granici dva dielektrika – Granični uslovi
ES.16.12.1	25	Naelektrisana lopta u dvoslojnom dielektriku – Vezana naelektrisanja
ES.14.04.1	26	Unošenje neutralne elektrode u ravan kondenzator – Energija električnog polja
ES.17.02.1	27	Sferni kondenzator sa koncentričnim dvoslojnim dielektrikom – Kapacitivnost
ES.17.04.1	28	Koaksijalni kondenzator sa radijalno nehomogenim dielektrikom – Kapacitivnost,
ES.17.04.1	29	Sferni kondenzator sa radijalno nehomogenim dielektrikom – Kapacitivnost, vezana naelektrisanja
ES.14.01.1	30	Koaksijalni vod sa klinastim osloncem – Kapacitivnost, napon proboja
ES.16.06.1	31	Merenje visine tečnosti koaksijalnim kondenzatorom – Kapacitivnost
ES.16.10.2	32	Sferni kondenzator do polovine ispunjen dielektrikom – Kapacitivnost, napon proboja
ES.12.01.1	33	Ravan kondenzator sa poprečno dvoslojnim dielektrikom – Kapacitivnost, vezana naelektrisanja
ES.14.03.1	34	Ravan kondenzator sa uzdužno troslojnim dielektrikom – Kapacitivnost
ES.16.12.1	35	Sferni kondenzator sa radijalno troslojnim dielektrikom – Kapacitivnost
DC.16.12.1	36	Sferni kondenzator sa nesavršenim dielektrikom – Kapacitivnost i provodnost
DC.13.04.1	37	Koaksijalni kondenzator sa nesavršenim dielektrikom – Kapacitivnost i provodnost
DC.15.10.2	38	Poluloptasti uzemljivač – Otpornost i napon koraka
DC.14.10.3	39	Loptasti uzemljivač – Otpornost i napon koraka
EM.16.01.2	40	Polukružna kontura u homogenom magnetnom polju – Elektromagnetna sila
EM.15.10.3	41	Dva tačkasta naelektrisanja u paralelnom kretanju – Elektromagnetna sila
EM.13.09.1	42	Pravoliniski provodnik – Magnetno polje, vezane struje
EM.16.01.1	43	Strujne konture oblika pravilnog mnogougla – Magnetno polje
EM.16.09.1	44	Kontura oblika kružne testere sa kružnim zupcima – Magnetno polje
EM.16.10.1	45	Kontura oblika kružne testere sa ravnim zupcima – Magnetno polje
EM.13.06.1	46	Pravougaona kontura – Magnetno polje
EM.14.04.1	47	Koncentrične kvadratne konture – Magnetno polje
EM.16.12.1	48	Kontura oblika ravne testere – Magnetno polje
EM.15.09.1	49	Kontura oblika ukosnice – Magnetno polje
EM.16.03.2	50	Kontura oblika ukosnice – Magnetno polje
EM.16.12.1	51	Ugaona kontura – Magnetno polje
EM.15.10.2	52	Spiralna kontura – Magnetno polje
EM.15.09.1	53	Koaksijalne kružne konture – Homogeno magnetno polje
EM.13.10.2	54	Trakasta prenosna linija – Kapacitivnost i induktivnost
EM.17.02.1	55	Trougaona kontura u polju ukrštenih provodnika – Indukovana elektromotorna sila
EM.16.06.1	56	Kvadratna kontura između provodnika dvožičnog voda – Indukovana elektromotorna sila
EM.16.01.1	57	Testerast talasni oblik pobudnog polja – Indukovana elektromotorna sila
EM.16.10.2	58	Romboidna kontura u polju pravog provodnika – Indukovana elektromotorna sila
EM.17.04.1	59	Kvadratna kontura u promenljivom polju pravog provodnika – Indukovana elektromotorna sila
EM.16.03.1	60	linearni generator jednosmernog napona – Indukovana elektromotorna sila
EM.15.09.1	61	Levitacija – Indukovana elektromotorna sila

