

Matematički modeli zvučnog polja (2)

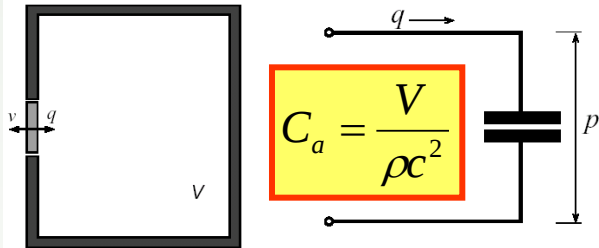
➤ U zavisnosti od dimenzija zatvorenog prostora i karakteristika izvora zvučnog polja može se izvršiti podjela na:

● **zatvoreni prostor malih dimenzija:** $\lambda \gg V^{1/3}$

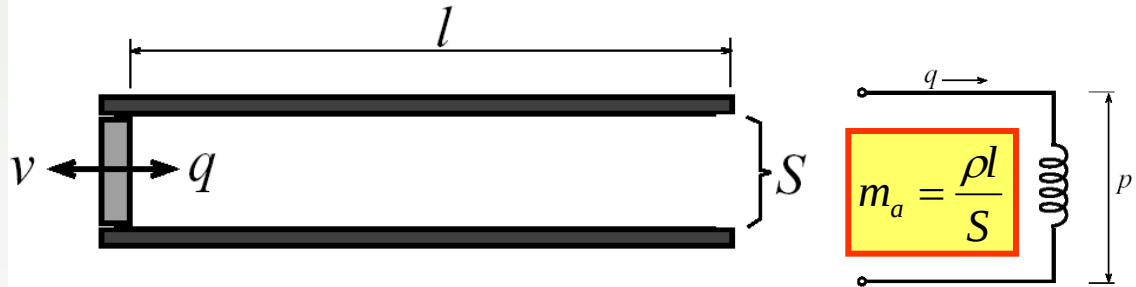
- ✗ Talasna dužina zvuka veća od svih dimenzija zatvorenog prostora.
- ✗ Parametri zvučnog polja (npr. zvučni pritisak) su vremenski promjenljivi i nezavisni od prostornih koordinata (pozicije u zatvorenom prostoru).
- ✗ Zvučno polje se modelira primenom analogija sa električnim kolima

PRIMER zatvorenog prostora malih dimenzija: Akustički rezonatori

Akustička kapacitivnost

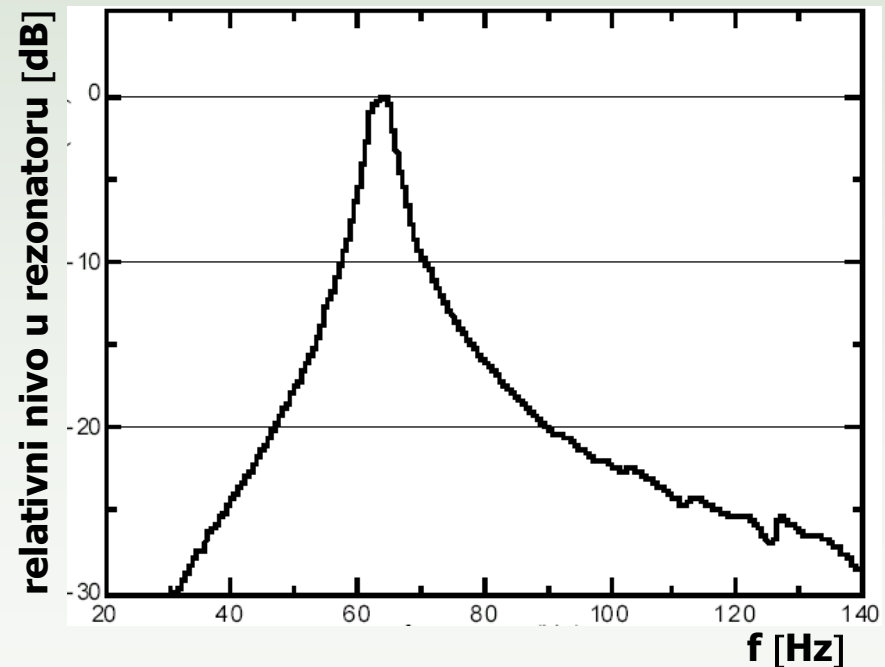
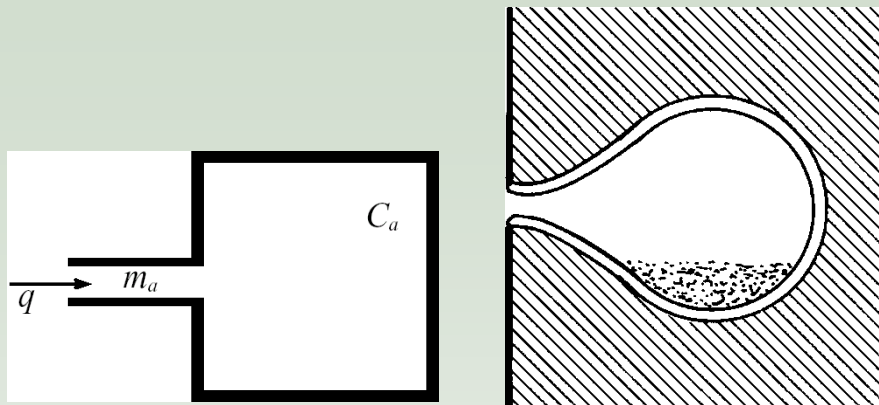


Akustička induktivnost



Akustički rezonatori

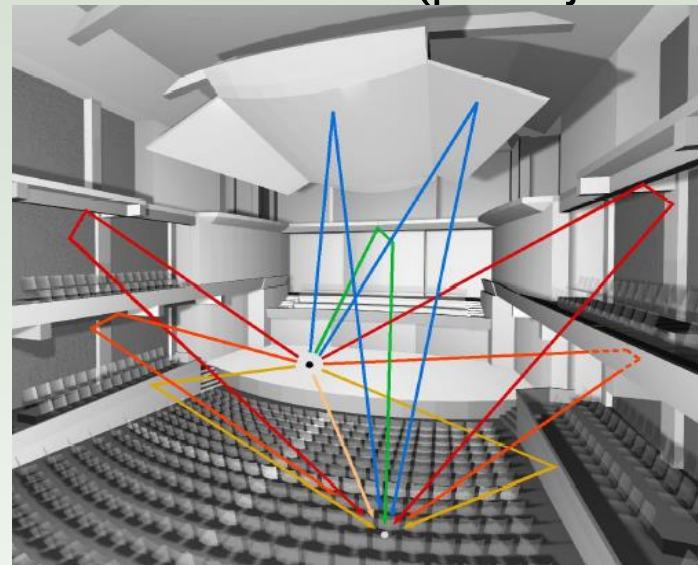
NAMENA: Pojačanje zvuka



Matematički modeli zvučnog polja (3)

● zatvoreni prostor velikih dimenzija: $\lambda \leq V^{1/3}$

- ✗ Talasna dužina zvuka manja od svih dimenzija zatvorenog prostora.
- ✗ Parametri zvučnog polja (npr. zvučni pritisak) su vremenski promenljivi i zavisni od prostornih koordinata (pozicije u zatvorenom prostoru).
- ✗ Generisani zvučni talasi prostiru se u svim pravcima, višestruko se odbijaju od graničnih površina, gubeći deo zvučne energije i stvarajući vrlo složene procese refleksije, interferencije, difrakcije, apsorpcije i prigušenja.
- ✗ Pojave su veoma složene tako da se mogu egzaktno rešiti samo u slučaju jednostavnih geometrijskih oblika prostora sa homogenom strukturom materijala na graničnim površinama.



PRIMER zatvorenog prostora velikih dimenzija: Koncertna sala

Koncertna sala



Matematički modeli zvučnog polja (4)

➤ Zvučno polje u zatvorenom prostoru velikih dimenzija modelira se primenom:

- ✗ Geometrijskog modela.

Zvučni fenomeni se opisuju i objašnjavaju osnovnim principima geometrijske optike.

- ✗ Talasnog modela.

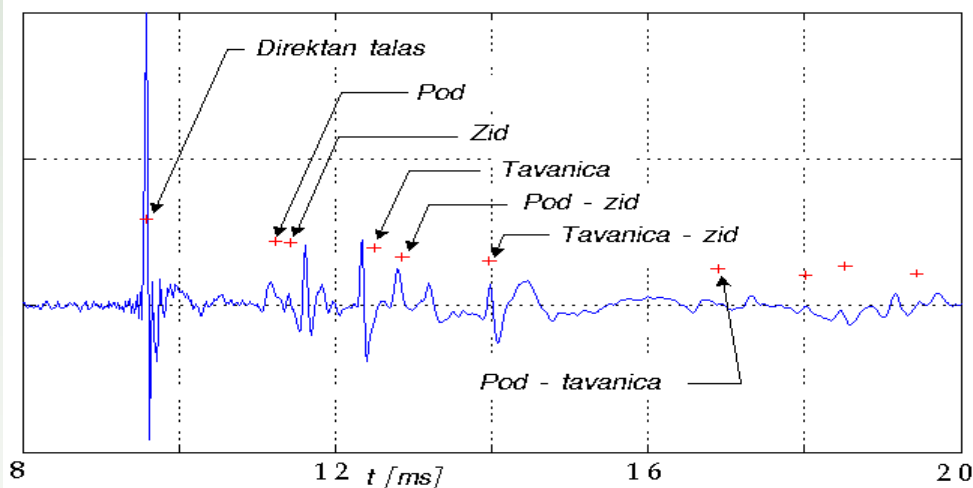
Primenjuje se samo na prostore jednostavnog geometrijskog oblika sa graničnim površinama prostorijske od istog materijala.

- ✗ Statističkog modela.

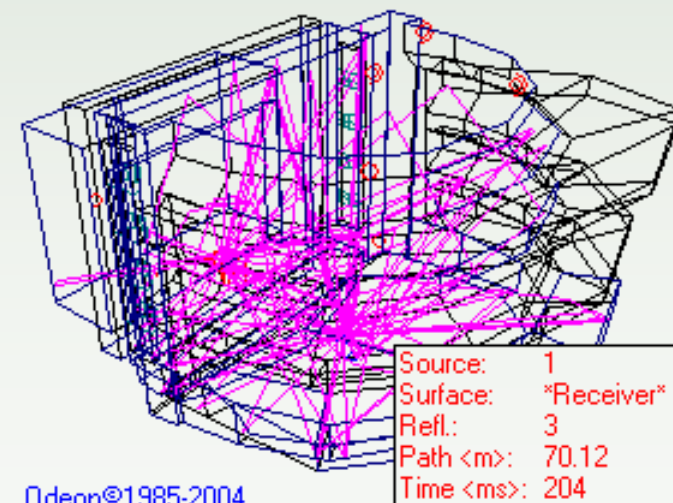
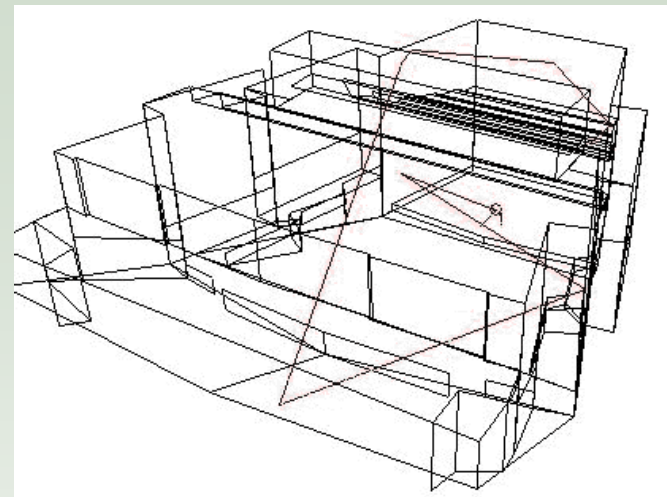
Primenjuje se na prostore velikih dimenzija, nepravilnog geometrijskog oblika sa graničnim površinama koje mogu biti od različitih materijala.

Geometrijski model

- Prostiranje zvučne energije opisuje se skupom zraka (prave linije) koji se prostiru od izvora zvuka. Svakom zraku se dodeljuje početna energija i prati se njegovo kretanje kroz prostoriju.
- Nakon svake refleksije menja se pravac zraka prema osnovnom pravilu: reflektovani ugao jednak je upadnom uglu.
- Energetskim sabiranjem intenziteta svih zraka dobija se impulsni odziv prostorije.



- Veoma veliki broj zraka zahteva korišćenje računara i softverskih paketa, npr. **ODEON**.



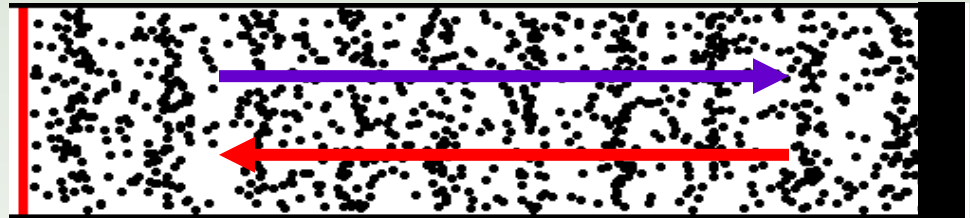
Talasni model – sopstvene frekvencije 1D prostora(1)

- Talasni model podrazumeva korišćenje talasne jednačine za opisivanje zvučnog polja:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p = 0$$

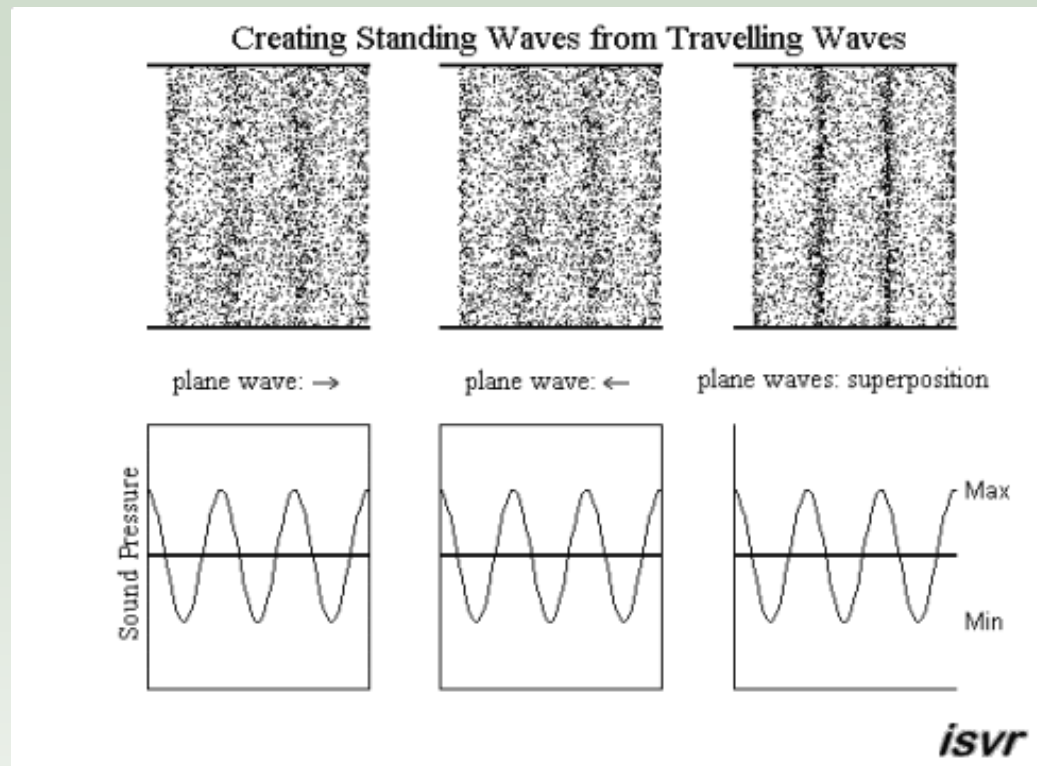
Rešavanje talasne jednačine uz zadovoljavanje graničnih uslova da je brzina čestica na graničnim površinama jednaka nuli omogućuje nalaženje **sopstvenih (rezonantnih) frekvencija** zatvorenog prostora.

- Najjednostavniji primer ograničenog prostora je jednodimenzioni prostor (1D): kruta cev malog poprečnog preseka zatvorena na oba kraja.



- Kada se izvor zvuka nalazi na jednom kraju cevi formiraju se **progresivni i reflektovani** zvučni talas koji formiraju stojeći talas u cevi ukoliko je frekvencija pobude jednaka sopstvenoj frekvenciji cevi. Stojeći talasi se dalje održavaju i bez prisustva zvučnog izvora.
- U cevi zatvorenoj na oba kraja mogu se pobuditi stojeći talasi koji se zatim sami održavaju.

Talasni model – sopstvene frekvencije 1D prostora(2)



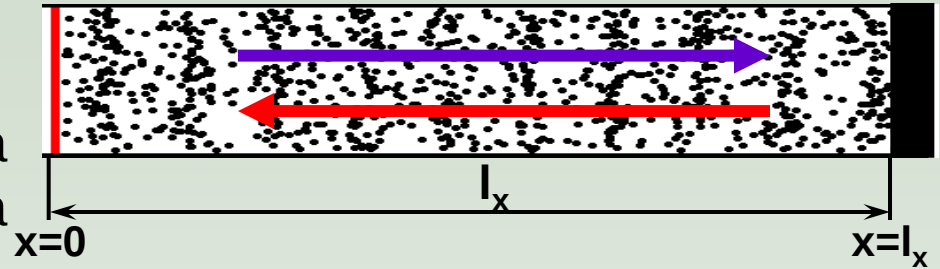
- Kada se izvor zvuka nalazi na jednom kraju cevi formiraju se **progresivni i reflektovani** zvučni talas koji formiraju stojeći talas u cevi ukoliko je frekvencija pobude jednaka sopstvenoj frekvenciji cevi. Stojeći talasi se dalje održavaju i bez prisustva zvučnog izvora.
- U cevi zatvorenoj na oba kraja mogu se pobuditi stojeći talasi koji se zatim sami održavaju.

Talasni model – sopstvene frekvencije 1D prostora(3)

- Za opisivanje zvučnog polja u cevi koristi se talasna jednačina koja ima oblik talasne jednačine ravnih talasa:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Granični uslovi: brzina čestica na graničnim površinama jednaka nuli – za $x=0$ i $x=L$.



- Rešavanje talasne jednačine uz zadovoljenje navedenih graničnih uslova daje sopstvene frekvencije zatvorene cevi na oba kraja:

$$f_n = \frac{n_x c}{2l_x} \quad (n_x = 1, 2, 3 \dots)$$

i promenu zvučnog pritiska na tim frekvencijama

$$\underline{p}(x, t) = A_x \cos\left(n_x \frac{\pi}{l_x} x\right) e^{j\omega t} \quad (n_x = 1, 2, 3 \dots)$$

- Sopstvene frekvencije su frekvencije na kojima je ispunjen uslov da je brzina čestica na početku i na kraju cevi jednaka nuli.
- Ukoliko je frekvencija izvora jednaka sopstvenoj frekvenciji dolazi do rezonanse i formiranja stojećih talasa.

Talasni model – sopstvene frekvencije 1D prostora(4)

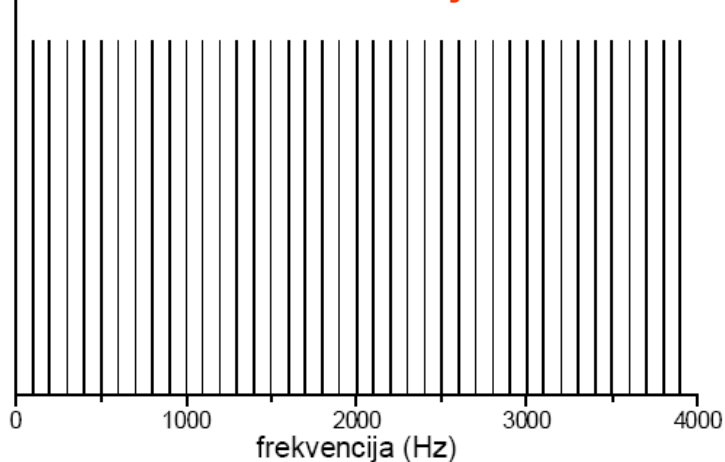
- Oblik (mod) oscilovanja zavisi od frekvencije pobude i sopstvenih frekvencija cevi, odnosno odnosa dužine cevi i talasne dužine zvuka.

$$f_n = \frac{nc}{2l_x} \quad (n=1,2,3...) \quad \Rightarrow \quad l_x = n \frac{\lambda}{2} \quad (n=1,2,3...)$$

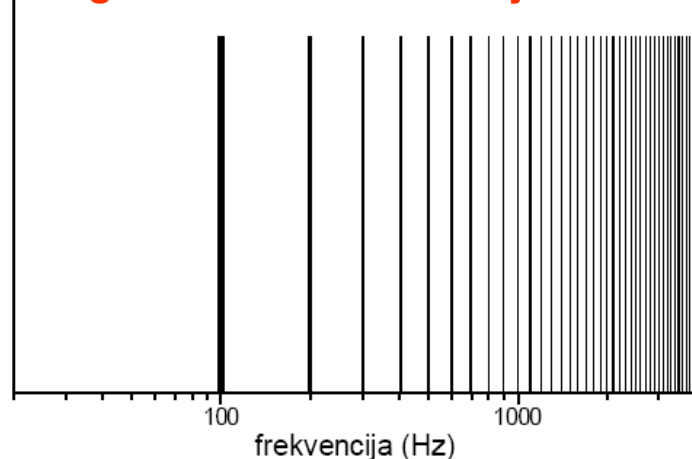
- Cev zatvorena na oba kraja ima beskonačni broj sopstvenih frekvencija harmonično raspoređenih po frekvencijskoj skali (jednako rastojanje između dve susedne sopstvene frekvencije na linearnoj skali).

Prikaz rasporeda sopstvenih frekvencija

Linearna frekvencijska skala



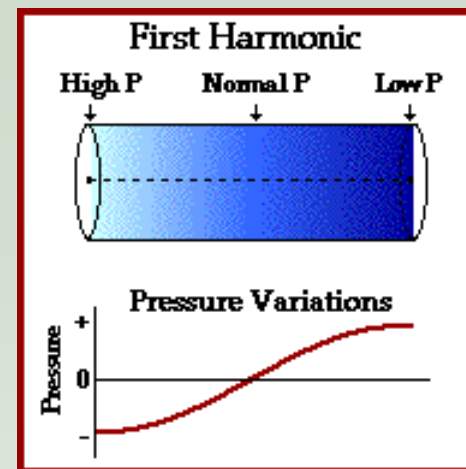
Logaritamska frekvencijska skala



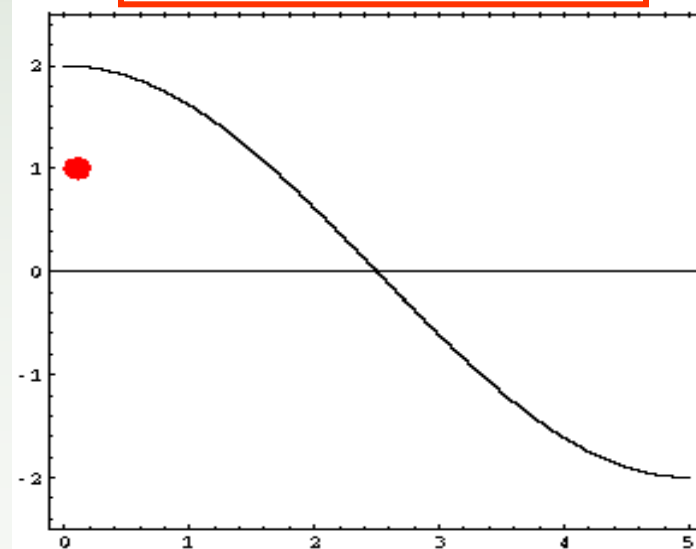
Talasni model – sopstvene frekvencije 1D prostora(5)

PRIMER: Cev krutih zidova dužine 5m zatvorena na oba kraja krutim završetkom.

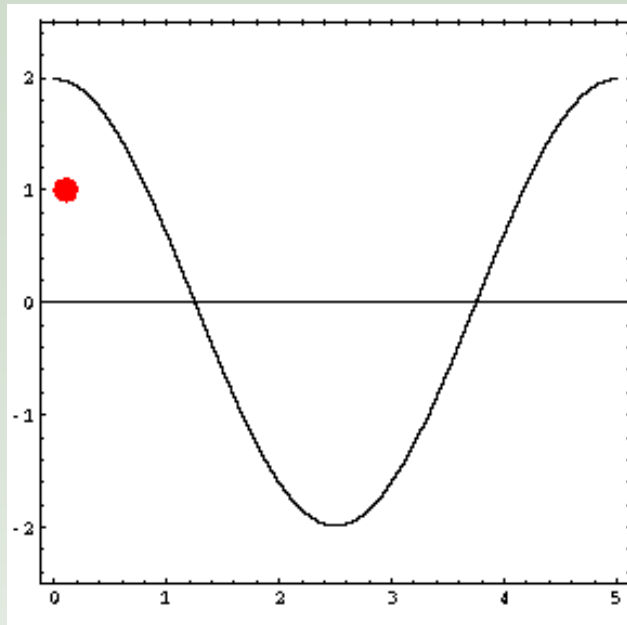
- Kruti krajevi cevi obezbeđuju reflektovanje talasa bez promene faze tako da su direktni i reflektujući talas u fazi što prouzrokuje formiranje stojećih talasa ako se frekvencija pobude poklopi sa sopstvenom frekvencijom.
- Osnovni mod oscilovanja dobija se za $n=1$, odnosno kada je dužina cevi jednaka polovini talasne dužine zvuka.
- Crvena tačka predstavlja izvor koji se kreće. Kada se izvor nalazi na krajevima cevi dobija se maksimalna amplituda pritiska na krajevima cevi.
- Amplituda stojećeg talasa je dvostruko veća jer on nastaje usled interferencije direktnog i reflektovanog talasa koji su u fazi.
- Kada se izvor nalazi u čvoru stojećeg talasa, amplituda zvučnog pritiska opada na nulu, zvuk se na tom mestu ne čuje bez obzira koliko je glasan izvor zvuka.



$$f_1 = \frac{c}{2l_x} = \frac{343}{2 \cdot 5} = 34.3 \text{ Hz}$$



Talasni model – sopstvene frekvencije 1D prostora(6)



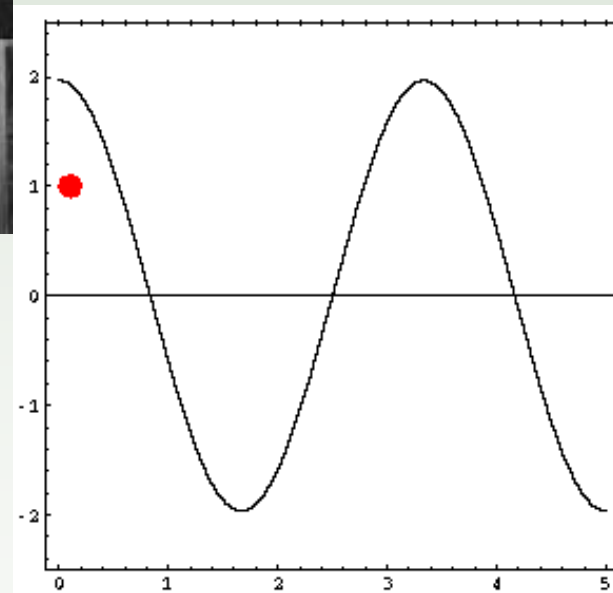
➤ Drugi mod oscilovanja dobija se za $n=2$, odnosno kada je dužina cevi jednaka talasnoj dužini zvuka.

$$f_2 = \frac{2c}{2l_x} = \frac{2 \cdot 343}{2 \cdot 5} = 68.6 \text{ Hz}$$



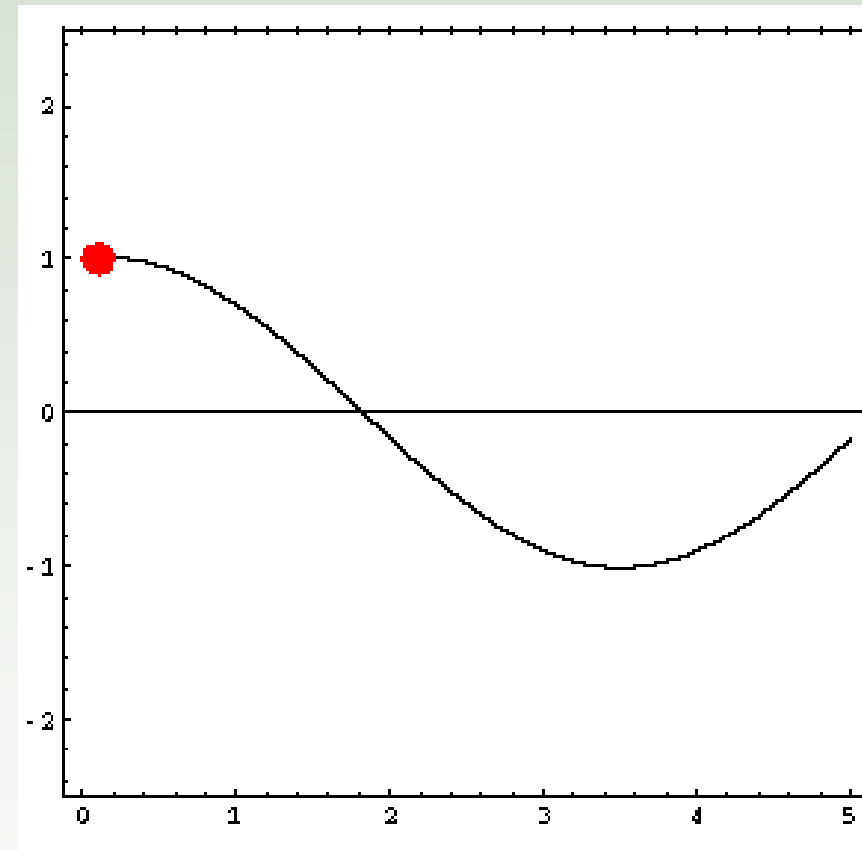
➤ Treći mod oscilovanja dobija se za $n=3$, odnosno kada je dužina cevi jednaka $3/2$ talasne dužine zvuka.

$$f_3 = \frac{3c}{2l_x} = \frac{3 \cdot 343}{2 \cdot 5} = 102.9 \text{ Hz}$$



Talasni model – sopstvene frekvencije 1D prostora(7)

- Stojeći talasi nastaju samo ako je frekvencija pobude jednaka nekoj od sopstvenih frekvencija. Na bilo kojoj drugoj frekvenciji, talas koji emituje izvor reflektuje se od drugog kraja cevi ali sa direktnim talasom ne formira stojeći talas.
- Nema čvorova i antičvorova i na krajevima cevi pritisak može biti nula.
- Maksimalna amplituda zvučnog pritiska ne premašuju amplitudu koju emituje izvor zvuka.
- Lokacija maksimuma se pomera sa izvorom zvuka.



Talasni model – sopstvene frekvencije 3D prostora(1)

- Za opisivanje zvučnog polja u 3D prostoru koristi se talasna jednačina koja za slučaj paralelopipedne prostorije, dimenzija l_x , l_y i l_z , ima oblik talasne jednačine ravnih talasa:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)$$

Granični uslovi: brzina čestica na graničnim površinama jednaka nuli.

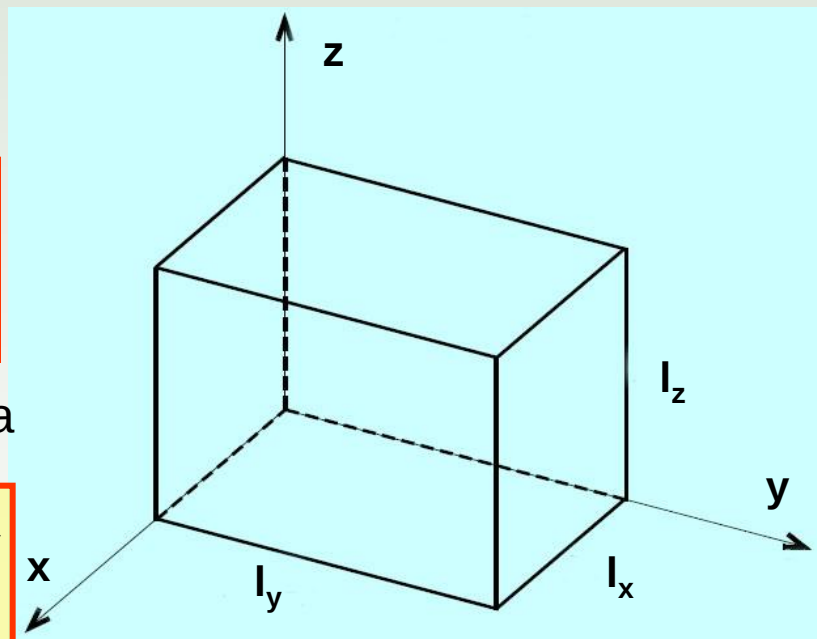
$$\begin{aligned} x=0, x=l_x &\Rightarrow v_x=0 \\ y=0, y=l_y &\Rightarrow v_y=0 \\ z=0, z=l_z &\Rightarrow v_z=0 \end{aligned}$$

- Rešavanje talasne jednačine uz zadovoljenje navedenih graničnih uslova daje sopstvene frekvencije prostorije:

$$f_N = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2} \quad (n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots)$$

i promenu zvučnog pritiska na tim frekvencijama

$$\underline{p}(x, y, z, t) = A \cos\left(n_x \frac{\pi}{l_x} x\right) \cos\left(n_y \frac{\pi}{l_y} y\right) \cos\left(n_z \frac{\pi}{l_z} z\right) e^{j\omega t}$$



Talasni model – sopstvene frekvencije 3D prostora(2)

- Bila koja kombinacija brojeva n_x , n_y i n_z daje jednu od sopstvenih frekvencija prostorije, odnosno definiše jedan od mogućih načina (modova) formiranja stojećih talasa u prostoriji.

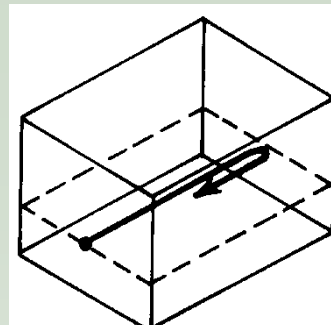
$$f_N = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2} \quad (n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots)$$

- Ako se frekvencija pobude poklopi sa sopstvenom frekvencijom u prostoriji nastaju rezonantni procesi, formiraju se stojeći talasi i dolazi do pojačanja zvučnog pritiska.
- U prostorijama se mogu formirati tri vrste stojećih talasa:

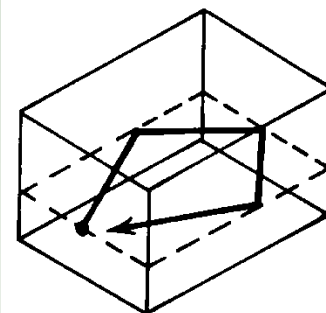
Ivični ili aksijalni talas nastaje refleksijom od dva naspramna paralelna zida i formira se paralelno jednoj koordinatnoj osi: zavisi samo od jedne koordinate, dva od tri broja n_x , n_y i n_z jednaka nuli.

Površinski ili tangencijalni talas nastaje refleksijom od četiri graničen površine i formira se paralelno jednoj graničnoj površini prostorije: zavisi od dve koordinate, jedan od tri broja n_x , n_y i n_z jednak je nuli.

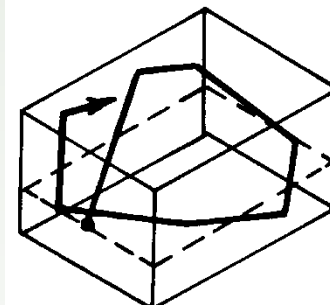
Prostorni talas nastaje refleksijom od svih šest graničnih površina: zavisi od tri koordinate, sva tri broja n_x , n_y i n_z različita od nule.



IVIČNI

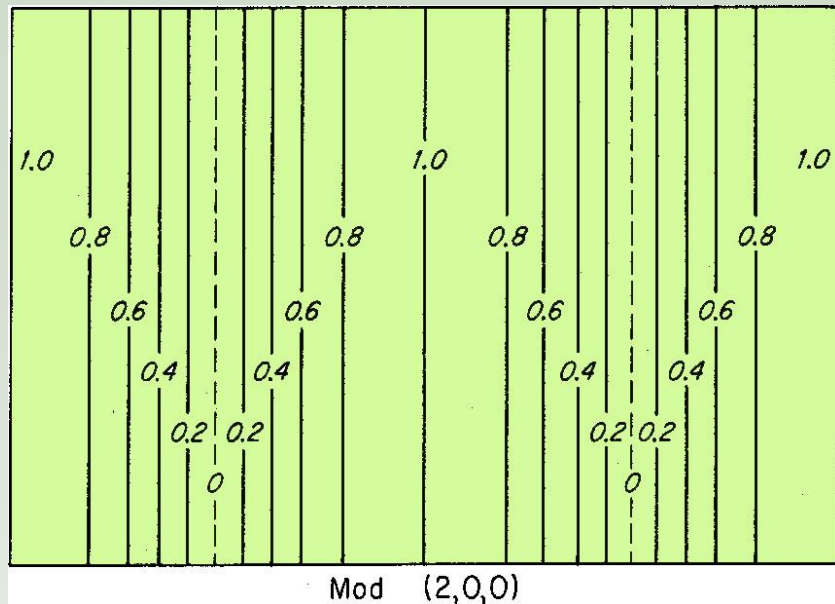


POVRŠINSKI



PROSTORNI

Ivični talas



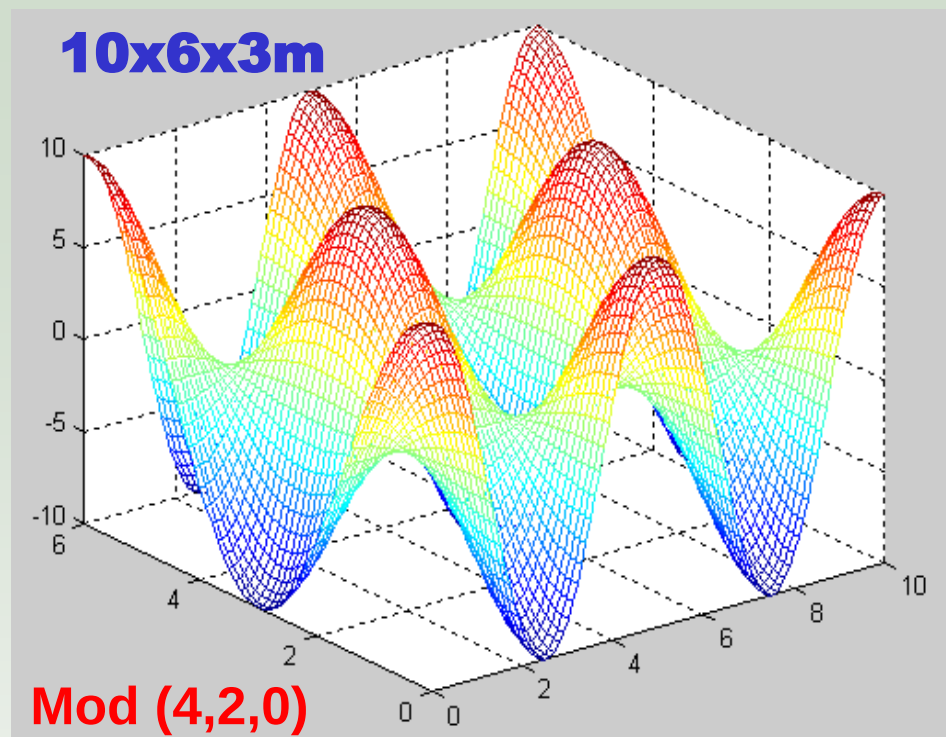
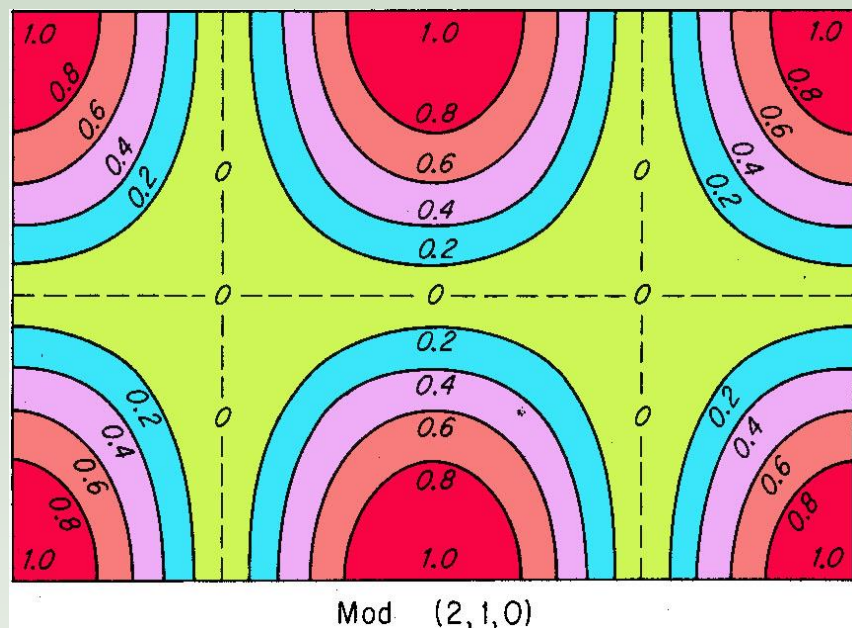
➤ Najniža sopstvena frekvencija dobija se za slučaj ivičnih talasa, kada su dva od tri broja n_x , n_y i n_z jednaka nuli, dok je treći broj, vezan za najveću dimenziju prostorije jednak jedinici:

$$l_x > l_y > l_z$$

$$f_{1,0,0} = \frac{c}{2l_x}$$

- Za svaki mod oscilovanja zvučni pritisak ima maksimum u uglovima prostorije.
- Za svaki mod oscilovanja, gde je jedan od tri broja n_x , n_y i n_z neparan, zvučni pritisak u centru prostorije jednak je nuli.

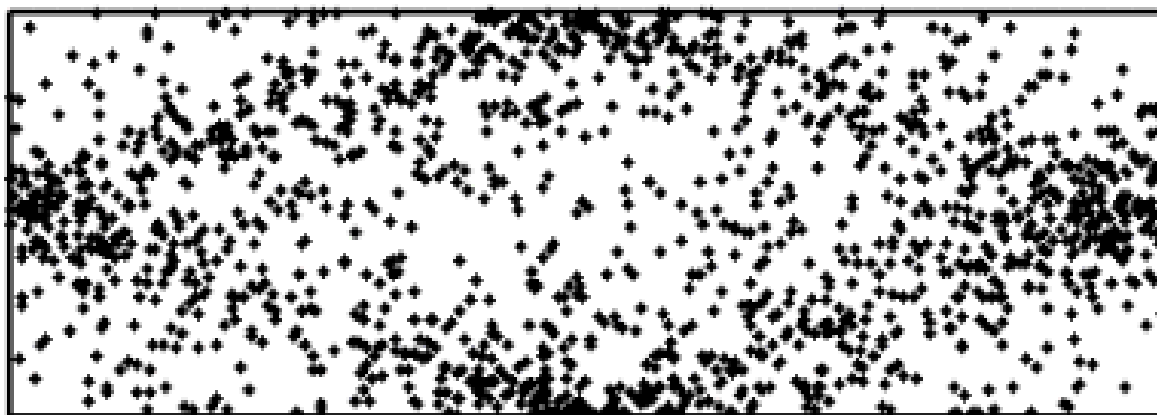
Površinski talas



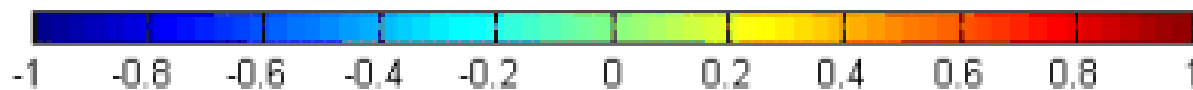
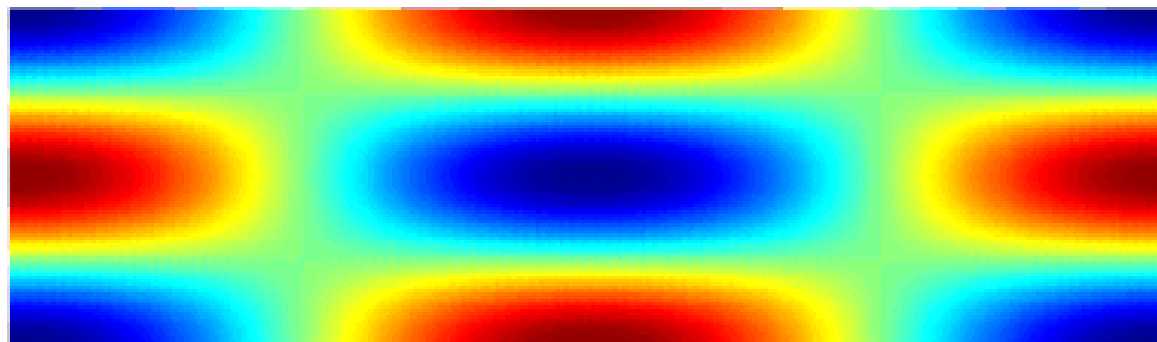
- Za svaki mod oscilovanja zvučni pritisak ima maksimum u uglovima prostorije.
- Za svaki mod oscilovanja, gde je jedan od tri broja n_x , n_y i n_z neparan, zvučni pritisak u centru prostorije jednak je nuli.

Površinski talas – mod (2,2,0)

Particle Displacement ($N_x=2, N_y=2, N_z=0$)



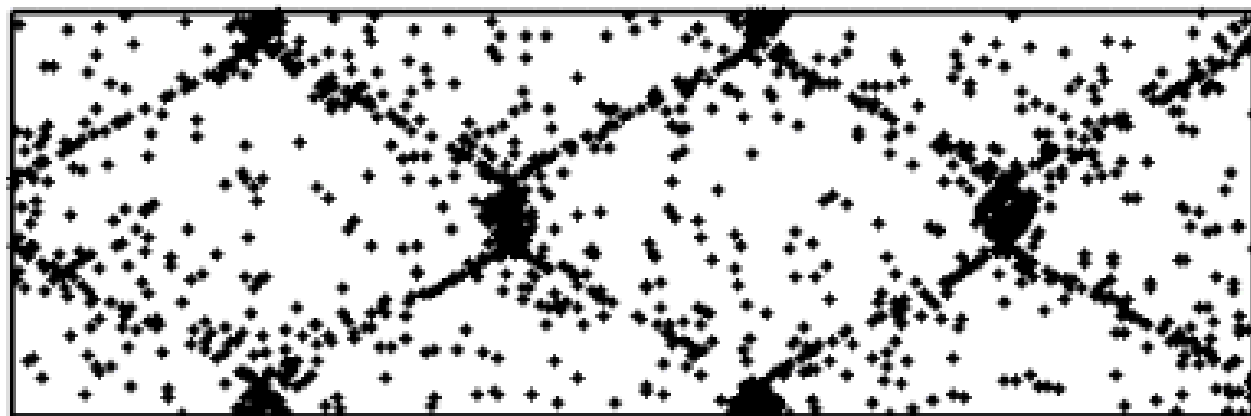
Pressure Mode



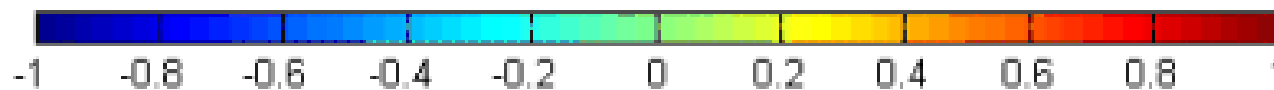
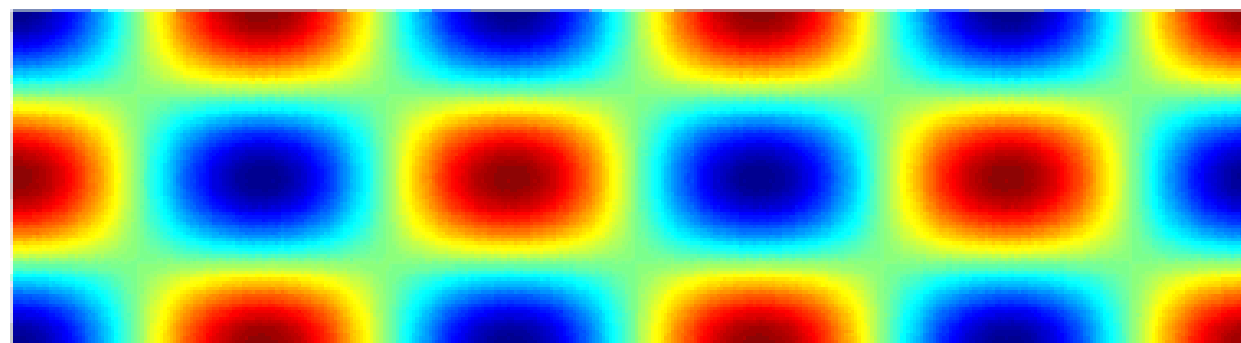
isvr

Površinski talas – mod (5,2,0)

Particle Displacement ($N_x=5$, $N_y=2$, $N_z=0$)

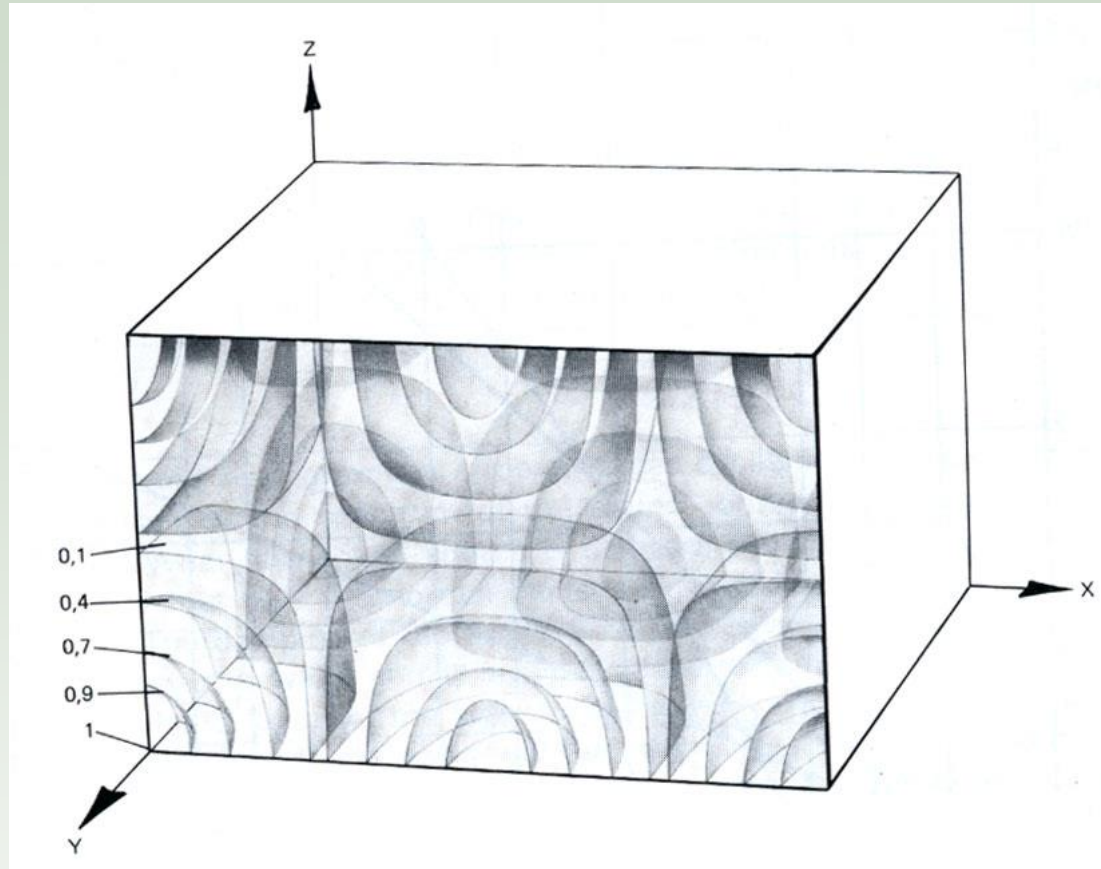


Pressure Mode



isvr

Prostorni talas



- Za svaki mod oscilovanja zvučni pritisak ima maksimum u uglovima prostorije.
- Za svaki mod oscilovanja, gde je jedan od tri broja n_x , n_y i n_z neparan, zvučni pritisak u centru prostorije jednak je nuli.

Talasni model – sopstvene frekvencije 3D prostora(3)

- Prostorija ima beskonačni broj sopstvenih frekvencija, sa različitim međusobnim rastojanjem na frekvencijskoj skali. Broj sopstvenih frekvencija u opsegu $f \div f+\Delta f$ može se približno izračunati korišćenjem formule:

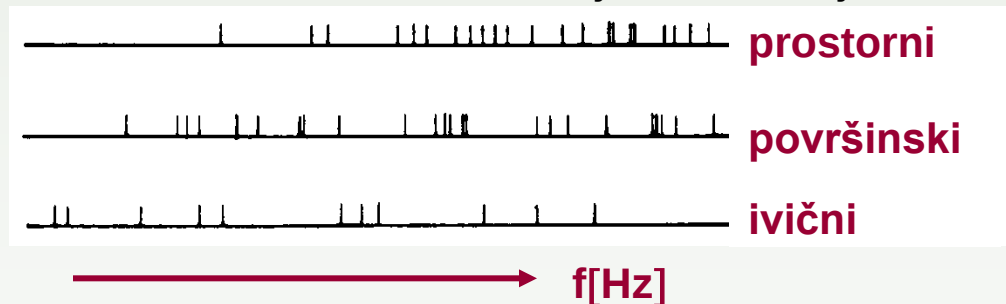
$$\Delta N = \left(\frac{4\pi V f^3}{c^3} + \frac{\pi S f}{2c^2} + \frac{L}{8c} \right) \Delta f \approx \frac{4\pi V f^3}{c^3} \Delta f$$

broj prostornih talasa

broj površinskih talasa

broj ivičnih talasa

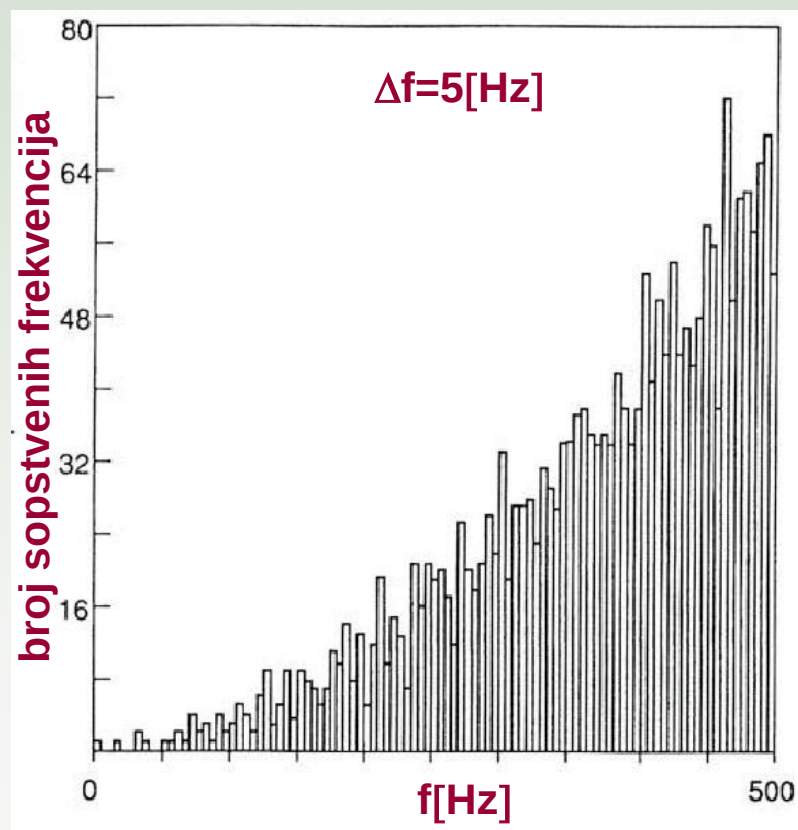
- Na niskim frekvencijama je broj sopstvenih frekvencija mali pa je i rastojanje između frekvencija veće, dok na višim frekvencijama broj sopstvenih frekvencija postaje sve veći a razmak između njih sve manji.



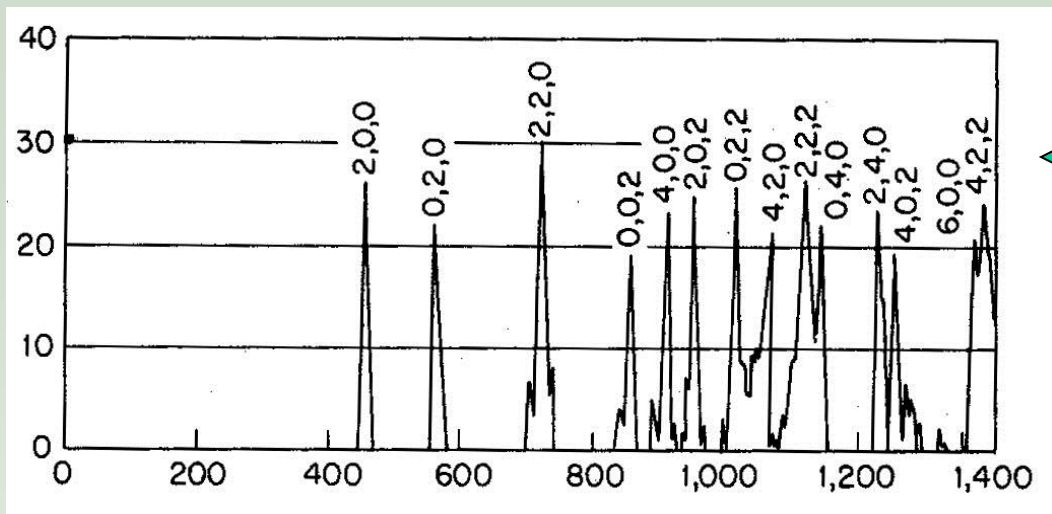
V – zapremina prostorije

S – ukupna površina prostorije

L – dužina svih ivica prostorije



Talasni model – sopstvene frekvencije 3D prostora(4)



Primena talasnog modela i poznavanje sopstvenih frekvencija prostorije omogućuje definisanje impulsnog odziva prostorije



frekvencija prostorije

Na niskim frekvencijama postoji mali broj sopstvenih frekvencija tako da njihovo pobuđivanje izaziva neravnomernost raspodele zvučnog pritiska. U tim slučajevima primenjuje se **talasna teorija**.

U velikim prostorijama, na višim frekvencijama, postoji veliki broj sopstvenih frekvencija gusto raspoređenih, tako da postoji ravnomerna raspodela zvučnog pritiska. U tim slučajevima primenjuje se **statistička teorija**.

