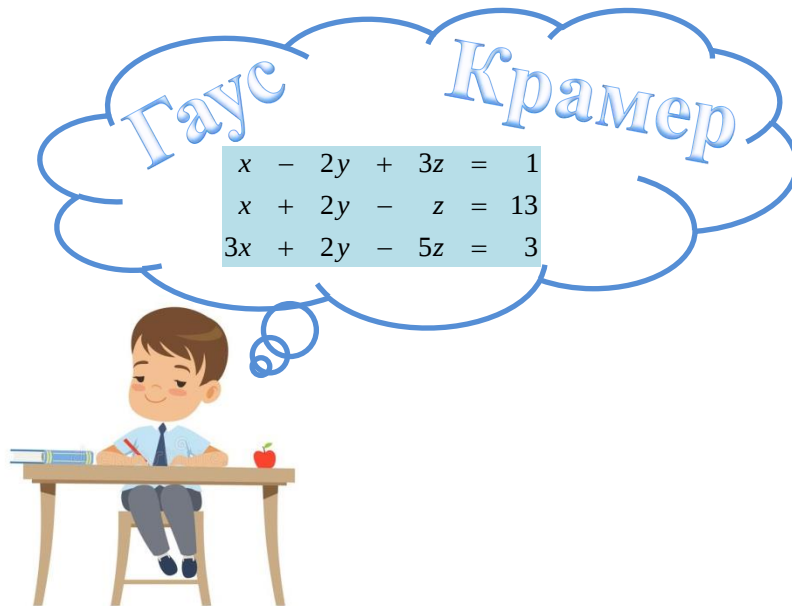


Факултет заштите на раду у Нишу
Предавања из предмета МАТЕМАТИКА
Линеарна алгебра – II део
Системи линеарних једначина



- Гаусов метод елиминације
- Крамерово правило
- Метод инверзне матрице
- Примене

Предметни наставник:
др Милош Цветковић

* Основни појмови

Линеарна једначина са две непознате је једначина облика $ax + by = c$, где су a, b и c познати бројеви.

Пример: $2x + y = 10$, овде је $a = 2, b = 1, c = 10$.

Линеарна једначина са више непознатих: $ax + by + cz = d$;
 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$.

Систем линеарних једначина је систем једначина у коме су све једначине линеарне.

Пример система линеарних једначина са 2 непознате:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Једначина 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Једначина 2} \end{cases}$$

Можемо проверити да је $x = 3$ и $y = 1$ једно решење система:

Једначина 1

$$2x - y = 5$$

$$2 \cdot 3 - 1 = 5 \quad \checkmark$$

Једначина 2

$$x + 4y = 7$$

$$3 + 4 \cdot 1 = 7 \quad \checkmark$$

* Општи облик система линеарних једначина

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Систем од } m \\ \text{једначина са } n \\ \text{непознатих} \end{array}$$

Непознате: $x_1, x_2, \dots, x_n$

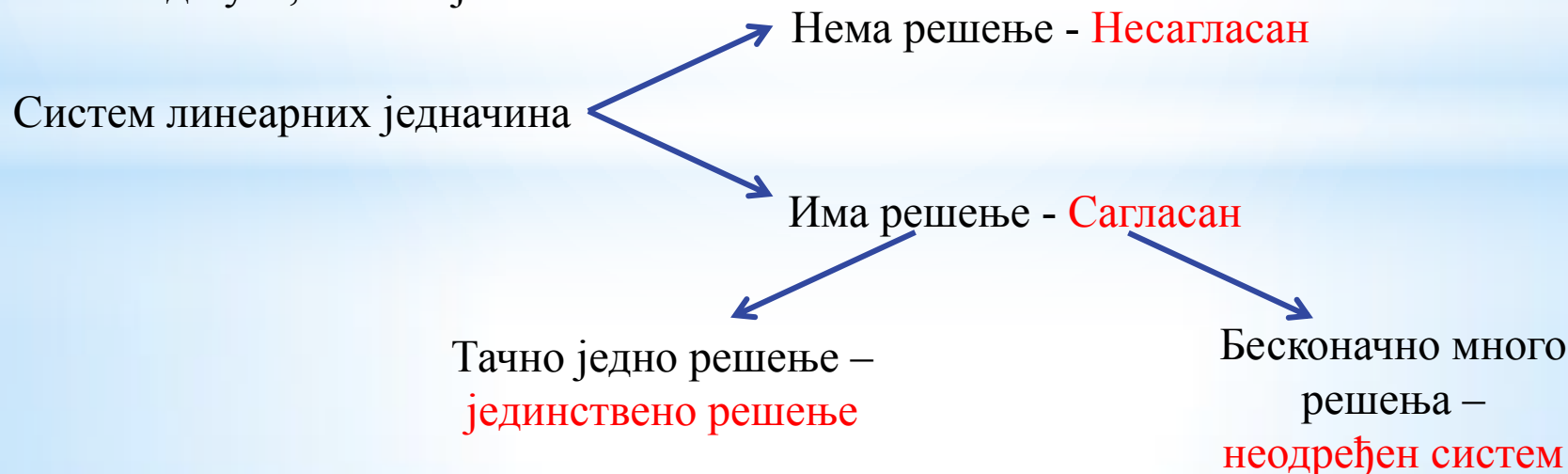
Коефицијенти: a_{ij}

Слободни чланови: b_i

Коефицијенти и слободни чланови су унапред познати.

$(c_1, c_2, \dots, c_n)$ је решење система ако при замени $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, једначине система прелазе у једнакост између бројева.

Систем је **ХОМОГЕН** ако је $b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_m = 0$. Ако је бар један од бројева b_i различит од нуле, систем је нехомоген.



* Да ли систем може да има тачно два различита решења?

Нека систем $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ има тачно 2 различита решења: (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

$$ax_1 + by_1 = c$$

$$ax_2 + by_2 = c$$

$$dx_1 + ey_1 = f$$

$$dx_2 + ey_2 = f$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \longrightarrow \begin{matrix} (x_0, y_0) \neq (x_1, y_1) \\ (x_0, y_0) \neq (x_2, y_2) \end{matrix}$$

$$ax_0 + by_0 = a \frac{x_1 + x_2}{2} + b \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2)}{2} = \frac{2c}{2} = c$$

$$dx_0 + ey_0 = d \frac{x_1 + x_2}{2} + e \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(dx_1 + ey_1) + (dx_2 + ey_2)}{2} = \frac{2f}{2} = f$$

Уређени пар (x_0, y_0) је такође решење полазног система –
контрадикција!

* Систем линеарних једначина у троугаоној форми

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 & \text{Једначина 1} \\ y + 2z = 5 & \text{Једначина 2} \\ z = 3 & \text{Једначина 3} \end{cases}$$

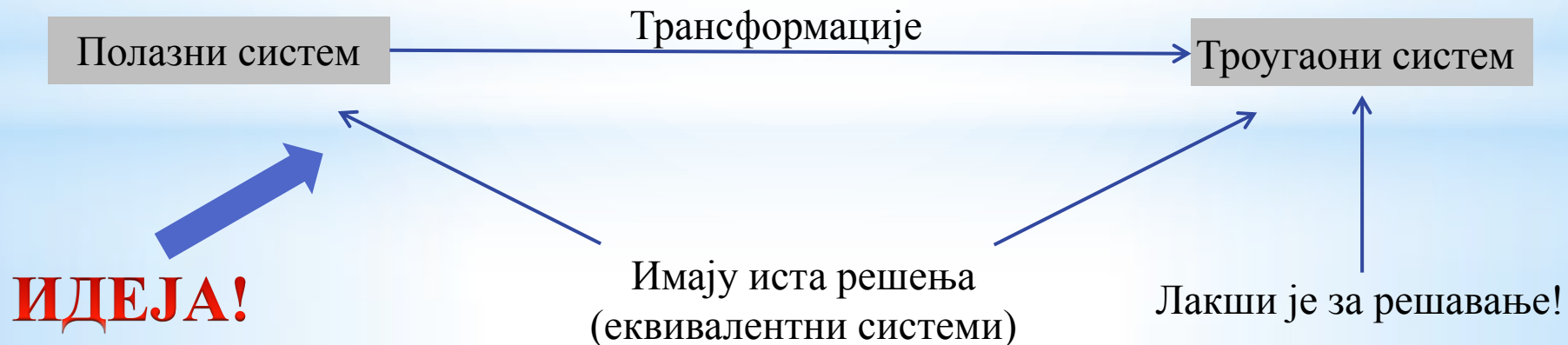
Из треће једначине одмах видимо да је $z = 3$.

Сада ову вредност замењујемо у другу једначину: $y + 2 \cdot 3 = 5$, $y + 6 = 5$, $y = -1$.

Сада $y = -1$ и $z = 3$ замењујемо у прву једначину: $x - 2 \cdot (-1) - 3 = 1$,
 $x + 2 - 3 = 1$, $x - 1 = 1$, $x = 2$.

Решење система: $(x, y, z) = (2, -1, 3)$

Као што видимо, није тешко решити систем који има троугаону форму!



* Које трансформације над системом су дозвољене?

Трансформације које доводе до еквивалентног система:

I. Две једначине могу заменити места

$$\begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ 3 + 4 \cdot 1 = 7 \end{array} \xrightarrow{J1 \leftrightarrow J2} \begin{array}{l} x + 4y = 7 \\ 2x - y = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 + 4 \cdot 1 = 7 \\ 2 \cdot 3 - 1 = 5 \end{array}$$

II. Множење неке једначине система бројем различитим од нуле

$$\begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ 3 + 4 \cdot 1 = 7 \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{2}J1} \begin{array}{l} x - \frac{1}{2}y = \frac{5}{2} \\ x + 4y = 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} \\ 3 + 4 \cdot 1 = 7 \end{array}$$

III. Једну једначину помножити бројем различитим од нуле и онда то додати некој другој једначини

$$\begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ 3 + 4 \cdot 1 = 7 \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{2}J1 + J2 \rightarrow J2} \begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ 2x + \frac{7}{2}y = \frac{19}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ 2 \cdot 3 + \frac{7}{2} \cdot 1 = \frac{19}{2} \end{array}$$

Трансформације I, II и III се могу примењивати једна за другом у произвољном редоследу. Број трансформација треба да буде коначан. Систем који се добије на крају има иста решења као и полазни систем.

* Гаусов метод елиминације

Примењивати трансформације I, II и III док не добијемо систем који има троугаону форму!

1. $(-1)J1 + J2 \rightarrow J2$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \quad J1 \\ x + 2y - z = 13 \quad J2 \\ 3x + 2y - 5z = 3 \quad J3 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \quad J1 \\ 4y - 4z = 12 \quad J2 \\ 3x + 2y - 5z = 3 \quad J3 \end{array} \right. \longrightarrow$$

2. $(-3)J1 + J3 \rightarrow J3$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \quad J1 \\ 4y - 4z = 12 \quad J2 \\ 8y - 14z = 0 \quad J3 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \quad J1 \\ 4y - 4z = 12 \quad J2 \\ -6z = -24 \quad J3 \end{array} \right. \longrightarrow$$

3. $(-2)J2 + J3 \rightarrow J3$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \quad J1 \\ y - z = 3 \quad J2 \\ z = 4 \quad J3 \end{array} \right. \longleftarrow \text{Систем у троугаоној форми}$$

4. $\frac{1}{4} \cdot J2, -\frac{1}{6} \cdot J3$

Решавање система – враћање уназад:

$J2: y - 4 = 3, y = 7;$

$J1: x - 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 1, x - 14 + 12 = 1, x - 2 = 1, x = 3.$

Систем има

јединствено решење:

$(x, y, z) = (3, 7, 4)$

* Проширена матрица система

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 3x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ -x & & & + & 4z & = & 11 \end{array} \right. \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

Проширена матрица
система

Трансформације I, II и III су потпуно исто што и одговарајуће трансформације над врстама проширене матрице система:

- Две врсте могу да замене места;
- Помножити сваки елемент неке врсте бројем $\lambda \neq 0$;
- Једну врсту помножити бројем различитим од нуле и то додати некој другој врсти.

* Опет претходни пример

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 13 \\ 3x & + & 2y & - & 5z & = & 3 \end{array}$$



$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)B1 + B2 \rightarrow B2}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & 4y & - & 4z & = & 12 \\ 3x & + & 2y & - & 5z & = & 3 \end{array}$$

Малопре смо приликом решавања система писали једначине (лево).

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 12 \\ 3 & 2 & -5 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{(-3)B1 + B3 \rightarrow B3}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & 4y & - & 4z & = & 12 \\ & & 8y & - & 14z & = & 0 \end{array}$$

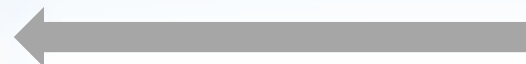
Међутим, није потребно писати једначине, радићемо само са коефицијентима и слободним члановима, тј. користићемо проширену матрицу система (десно)!

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 12 \\ 0 & 8 & -14 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-2)B2 + B3 \rightarrow B3}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & 4y & - & 4z & = & 12 \\ & & & & -6z & = & -24 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & -24 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{4}B2 \\ -\frac{1}{6}B3 \end{array}}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 3 \\ & & & & z & = & 4 \end{array}$$



$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Степенаста форма проширене матрице система

* Општа стратегија решавања система



Степенаста форма проширене матрице система – особине:

- **Први ненула елемент у свакој врсти је 1 (гледајући са лева на десно). Та јединица се зове водећи члан.**
- **Водећи члан једне врсте налази се десно у односу на водећи члан врсте која је непосредно изнад.**
- **Све врсте које су састављене само од нула налазе се на дну матрице.**

Систем који нема решење

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & 3y & + & 2z & = & 12 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 14 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 20 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 5 & 14 \\ 1 & -2 & 3 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(-1)B1 + B3} \rightarrow \text{B3}]{\text{(-2)B1 + B2} \rightarrow \text{B2}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(-1)B2 + B3} \rightarrow \text{B3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{18}B_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Последња врста даје једначину $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1$, а одавде следи $0 = 1$, што није тачно. Закључујемо да систем нема решења, тј. систем је несагласан.

$$\begin{array}{rrcr} -3x & - & 5y & + & 36z & = & 10 \\ & - & x & & & + & 7z & = & 5 \\ & & x & + & y & - & 10z & = & -4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 & 36 & 10 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{B1} \leftrightarrow \text{B3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ -3 & -5 & 36 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{B1} + \text{B2} \rightarrow \text{B2} \\ 3\text{B1} + \text{B3} \rightarrow \text{B3} \end{array}}$$

Diagram illustrating the row operation $2B_2 + B_3 \rightarrow B_3$ on the augmented matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2B_2 + B_3 \rightarrow B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The resulting system of equations is shown on the right:

$$\begin{aligned} x + y - 10z &= -4 \\ y - 3z &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Ова врста не даје
никакве информације!

z – слободна променљива; $z = t, t \in \mathbb{R}$

$$y - 3t = 1 \longrightarrow y = 3t + 1$$

$$x + (3t + 1) - 10t = -4 \implies x - 7t + 1 = -4 \implies x - 7t = -5 \implies x = 7t - 5$$

Решение система: $(x, y, z) = (7t - 5, 3t + 1, t)$

* Систем са бесконачно много решења

$$\begin{array}{rclcl} -3x & - & 5y & + & 36z & = & 10 \\ -x & & & + & 7z & = & 5 \\ x & + & y & - & 10z & = & -4 \end{array}$$

Решење система: $(x, y, z) = (7t - 5, 3t + 1, t)$

За сваку вредност параметра t добијамо једно конкретно решење система. Како параметар t може да буде било који реалан број, то онда значи да систем има бесконачно много решења.

Неке вредности параметра t	Решење (x, y, z)
-1	$(-12, -2, -1)$
0	$(-5, 1, 0)$
5	$(30, 16, 5)$

$$\begin{array}{rclcl} -3 \cdot 30 & - & 5 \cdot 16 & + & 36 \cdot 5 & = & 10 \\ -30 & & & + & 7 \cdot 5 & = & 5 \\ 30 & + & 16 & - & 10 \cdot 5 & = & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} -3 \cdot (-12) & - & 5 \cdot (-2) & + & 36 \cdot (-1) & = & 10 \\ -(-12) & & & + & 7 \cdot (-1) & = & 5 \\ -12 & + & (-2) & - & 10 \cdot (-1) & = & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} -3 \cdot (-5) & - & 5 \cdot 1 & + & 36 \cdot 0 & = & 10 \\ -(-5) & & & + & 7 \cdot 0 & = & 5 \\ -5 & + & 1 & - & 10 \cdot 0 & = & -4 \end{array}$$

* Крамерово правило

Крамерово правило примењује се само на системе једначина код којих је број непознатих једнак броју једначина (квадратни системи).

$$\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$$

Множимо прву једначину са $-c$, а другу једначину са a :

$$\begin{cases} -acx - bcy = -cr \\ acx + ady = as \end{cases}$$

Сабирамо ове две једначине: $ady - bcy = as - cr$, $(ad - bc)y = as - cr$

Добијамо: $y = \frac{as - cr}{ad - bc}$

Множимо прву једначину са d , а другу једначину са $-b$:

$$\begin{cases} adx + bdy = rd \\ -bcx - bdy = -bs \end{cases}$$

Сабирамо ове две једначине: $adx - bcx = rd - bs$, $(ad - bc)x = rd - bs$

Добијамо: $x = \frac{rd - bs}{ad - bc}$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \text{ (Детерминанта система)}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \textcolor{red}{r} & b \\ \textcolor{red}{s} & d \end{vmatrix} = rd - bs \left(\begin{array}{c} \text{Прва колона детерминанте } D \text{ замењује се} \\ \text{слободним члановима} \end{array} \right)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & \textcolor{red}{r} \\ c & \textcolor{red}{s} \end{vmatrix} = as - cr \left(\begin{array}{c} \text{Друга колона детерминанте } D \text{ замењује се} \\ \text{слободним члановима} \end{array} \right)$$

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

* Крамерово правило

Пример:

Решити систем једначина Крамеровим правилом: $\begin{cases} 2x + 6y = -1 \\ x + 8y = 2 \end{cases}$

Детерминанта система: $D = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 1 = 10$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 8 - 6 \cdot 2 = -20$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 5$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-20}{10} = -2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Решење система: } (x, y) = \left(-2, \frac{1}{2}\right).$$

Провера: $2 \cdot (-2) + 6 \cdot \frac{1}{2} = -1$ $(-2) + 8 \cdot \frac{1}{2} = 2$

* Крамерово правило

Систем од три једначине са три непознате величине:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ (Детерминанта система)}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$z = \frac{D_z}{D}$$

* Крамерово правило

Пример:

Решити систем једначина Крамеровим правилом:
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ x + 6z = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

Детерминанта система: $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$D = -((-3) \cdot 0 - 4 \cdot (-2)) - 6 \cdot (2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 3) = -8 - 6 \cdot 5 = -38; \quad \mathbf{D = -38}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 \cdot (1 \cdot (-2) - (-3) \cdot 5) = -6 \cdot 13 = -78$$

$$\mathbf{D_x = -78}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 6 \cdot 7 = -22; \quad \mathbf{D_y = -22}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -((-3) \cdot 5 - 1 \cdot (-2)) = 13; \quad \mathbf{D_z = 13}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-78}{-38} = \frac{39}{19}$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-22}{-38} = \frac{11}{19}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{13}{-38} = -\frac{13}{38}$$

$$\text{Решење система: } (x, y, z) = \left(\frac{39}{19}, \frac{11}{19}, -\frac{13}{38} \right)$$

* Крамерово правило

- Крамерово правило се може применити само на квадратне системе код којих је детерминанта система D различита од нуле.
- Ако се ради о правоугаоном систему онда треба применити Гаусов метод елиминације.
- Ако се ради о квадратном систему код којег је детерминанта система $D = 0$ онда такође треба применити Гаусов метод елиминације.
- Закључак: Крамерово правило је корисна замена за Гаусов метод елиминације, али само у неким ситуацијама!

* Метод инверзне матрице

Матрични запис квадратног система линеарних једначина – случај система од две једначине и две непознате величине:

$\begin{cases} 2x - 5y = 15 \\ 3x - 6y = 36 \end{cases}$		
$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix},$ (матрица система)	$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$	$B = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$
$\textcolor{red}{A}X = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 5y \\ 3x - 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix} = \textcolor{red}{B}$		
Матрични запис система: $AX = B$		

Решавање матричне једначине $AX = B$

$AX = B$	
$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$	Множимо са леве стране са A^{-1}
$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$	Асоцијативни закон за множење матрица
$I_2X = A^{-1}B$	Особина инверзне матрице
$X = A^{-1}B$	Множење са јединичном матрицом

$$\textcolor{red}{I}_2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \textcolor{red}{X}$$

* Метод инверзне матрице

$\begin{cases} 2x - 5y = 15 \\ 3x - 6y = 36 \end{cases}$	
$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix},$ (матрица система)	$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$
Решење: $X = A^{-1}B$	
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
$a = 2, b = -5, c = 3, d = -6$	$A^{-1} = \frac{1}{2(-6) - (-5)3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 5/3 \\ -1 & 2/3 \end{bmatrix}$	
$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5/3 \\ -1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot 15 + \frac{5}{3} \cdot 36 \\ (-1) \cdot 15 + \frac{2}{3} \cdot 36 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$	$(x, y) = (30, 9)$

* Метод инверзне матрице

Матрични запис квадратног система линеарних једначина – случај система од три једначине и три непознате величине:

$\begin{cases} 2x + 4y + z = 7 \\ -x + y - z = 0 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$		
$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix},$ (матрица система)	$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$	$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$
$\textcolor{red}{AX} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 4y + z \\ -x + y - z \\ x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \textcolor{red}{B}$		
Матрични запис система: $AX = B$		

Добили смо матричну $\longrightarrow AX = B$

једначину која има исти облик као и матрична једначина у случају система две једначине са две непознате величине!

$$\textcolor{red}{A}^{-1}(AX) = \textcolor{red}{A}^{-1}B$$

$$(\textcolor{red}{A}^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\textcolor{red}{I}_3 X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Треба наћи A^{-1}

* Метод инверзне матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

Корак 1: Детерминанта

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \underset{1}{1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \underset{4}{4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (4 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) - 4 \cdot (2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -5 - 4 \cdot (-1) = -1; \quad \det A = -1$$

$\det A \neq 0 \rightarrow$ матрица A има инверзну матрицу

Корак 2: Кофактор матрица

$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ $A_{11} = 4$	$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $A_{12} = -1$	$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ $A_{13} = -5$
$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ $A_{21} = 4$	$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $A_{22} = -1$	$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ $A_{23} = -4$
$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $A_{31} = -5$	$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ $A_{32} = 1$	$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ $A_{33} = 6$

* Метод инверзне матрице

Корак 2: Кофактор матрица

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & -4 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Корак 3: Адјунгована матрица

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Корак 4: Инверзна матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \cdot 7 + 5 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 7 + (-1) \cdot (-2) \\ 5 \cdot 7 + (-6) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ 9 \\ 47 \end{bmatrix}$$

$$\text{Решење система} \begin{cases} 2x + 4y + z = 7 \\ -x + y - z = 0 \\ x + 4y = -2 \end{cases} \text{ је } (x, y, z) = (-38, 9, 47)$$

* Квадратни хомогени систем

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

Детерминанта система: $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Квадратни хомогени систем је увек сагласан; $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ је једно решење система. Ово решење се зове **тривијално решење**.

Први случај: $D \neq 0$

$$x = \frac{D_x}{D} = 0 \quad y = \frac{D_y}{D} = 0 \quad z = \frac{D_z}{D} = 0$$

У овом случају квадратни хомоген систем има само тривијално решење.

Други случај: $D = 0$

У овом случају квадратни хомогени систем има нетривијална решења. Тада до решења не можемо доћи применом Крамеровог правила, већ користимо Гаусов метод елиминације.

Квадратни хомогени систем

$$\begin{array}{rcccccl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 4 - (-8) - 12 = 0$$

Детерминанта система је једнака нули, па систем има нетривијална решења, тј. има бесконачно много решења. За решавање система користимо Гаусов метод елиминације.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)B_1 + B_2 \rightarrow B_2 \\ (-3)B_1 + B_3 \rightarrow B_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{3}\right)B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)B_2 + B_3 \rightarrow B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & & \frac{2}{3}z & = & 0 \end{array}$$

z – слободна променљива; $z = t, t \in \mathbb{R}$

$$y - \frac{2}{3}t = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{2}{3}t$$

$$x + \frac{2}{3}t - t = 0 \quad \longrightarrow \quad x - \frac{1}{3}t = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1}{3}t$$

Решење система: $(x, y, z) = \left(\frac{t}{3}, \frac{2t}{3}, t\right)$

* Моделовање помоћу система линеарних једначина

- I. Идентификовање непознатих величина; означити их са $x, y, z, u, v, t, \dots$ (или користити нека друга слова).
- II. Све друге релевантне величине које се јављају у проблему изразити помоћу непознатих уведених у I.
- III. Наћи везе између величина нађених у II; поставити систем једначина који изражава те везе.
- IV. Решити систем и интерпретирати резултате.

* Балансирање хемијских једначина



C_3H_8 — пропан

O_2 — молекул кисеоника

CO_2 — угљен-диоксид

H_2O — вода



x_1, x_2, x_3, x_4 — коефицијенти које треба одредити; сви коефицијенти су природни бројеви.

ИДЕЈА:

Број атома угљеника (C) са леве стране једначине једнак је броју атома угљеника са десне стране једначине. Исто важи и за водоник (H) и за кисеоник (O).

	Лева страна једначине	Десна страна једначине
Број атома угљеника (C)	$3x_1$	x_3
Број атома водоника (H)	$8x_1$	$2x_4$
Број атома кисеоника (O)	$2x_2$	$2x_3 + x_4$

* Балансирање хемијских једначина

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 3 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0 \\ 8 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 - 1 \cdot x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}B1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-8)B1 + B2 \rightarrow B2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

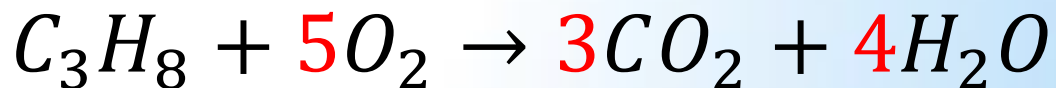
$$\xrightarrow{B2 \leftrightarrow B3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{8}B3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ x_3 - \frac{3}{4}x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 - \text{слободна променљива} \\ x_4 = t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{4}t, \frac{5}{4}t, \frac{3}{4}t, t \right)$$

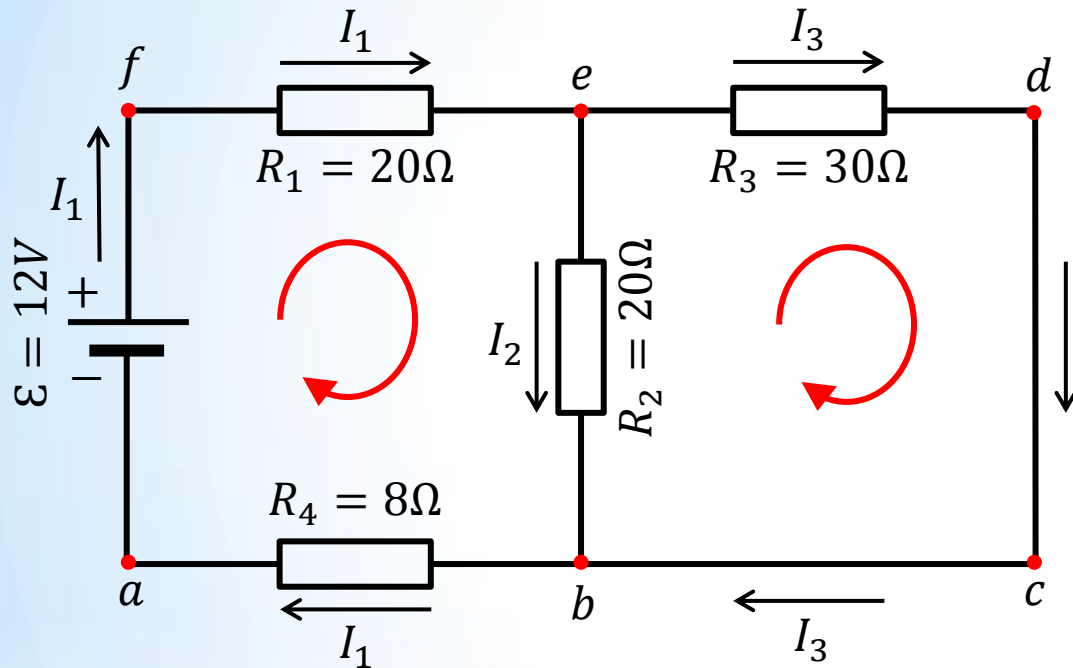
Бесконечно
много
решења

$$t = 4: (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 5, 3, 4)$$



* Електрична кола и Кирхофова правила

Наћи струје I_1 , I_2 и I_3 у електричном колу на слици.



Прво Кирхофово правило:

Збир струја које утичу у чворну тачку једнак је збиру струја које из те тачке истичу.

Друго Кирхофово правило:

У свакој контури разгранатог кола алгебарски збир падова напона на отпорима једнак је алгебарском збиру свих електромоторних сила у контури.

Падови напона на отпорима су изрази облика IR , где је I струја и R је отпор. Производ IR се узима са знаком $+$ ако се смер струје I поклапа са смером обилажења контуре, у супротном се узима са знаком $-$. Електромоторна сила се узима са знаком $+$ ако се приликом обилажења контуре прво наиђе на негативан, а онда на позитиван пол; у супротном, електромоторна сила се узима са знаком $-$.

Чвор e : $I_1 = I_2 + I_3$

Контура $afeba$: $I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_1 R_4 = \varepsilon$

Контура $edcbe$: $I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0$

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ (R_1 + R_4)I_1 + R_2 I_2 = \varepsilon \\ -R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \end{cases}$$

* Електрична кола и Кирхофова правила

Заменом бројних вредности добијамо следећи систем линеарних једначина:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 28I_1 + 20I_2 = 12 \\ -20I_2 + 30I_3 = 0 \end{cases}$$

Непознате величине су I_1, I_2, I_3 .

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 28 & 20 & 0 \\ 0 & -20 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 0 \\ -20 & 30 \end{vmatrix} - 28 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -20 & 30 \end{vmatrix} = 600 - 28 \cdot (-50) = 2000$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 12 & 20 & 0 \\ 0 & -20 & 30 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -20 & 30 \end{vmatrix} = -12 \cdot (-50) = 600$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 28 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 30 \end{vmatrix} = 12 \cdot 30 = 360$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 28 & 20 & 12 \\ 0 & -20 & 0 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} = -12 \cdot (-20) = 240$$

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{600}{2000} = 0,3A$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{360}{2000} = 0,18A$$

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{240}{2000} = 0,12A$$