

Факултет заштите на раду у Нишу  
Предавања из предмета МАТЕМАТИКА  
Линеарна алгебра – I део

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating matrix addition. A yellow arc connects the top-left elements (3 and 4) of the first two matrices to the top-left element (7) of the result matrix. Above this arc is the calculation  $3+4=7$ .

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Diagram illustrating the expansion of a 3x3 determinant along the third column. Red arrows point from the elements  $c, f, i$  to the corresponding 2x2 minors. Blue arrows point from the elements  $a, b, d, e, g, h$  to the signs  $+, +, -$  below them, indicating the alternating signs for cofactor expansion.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

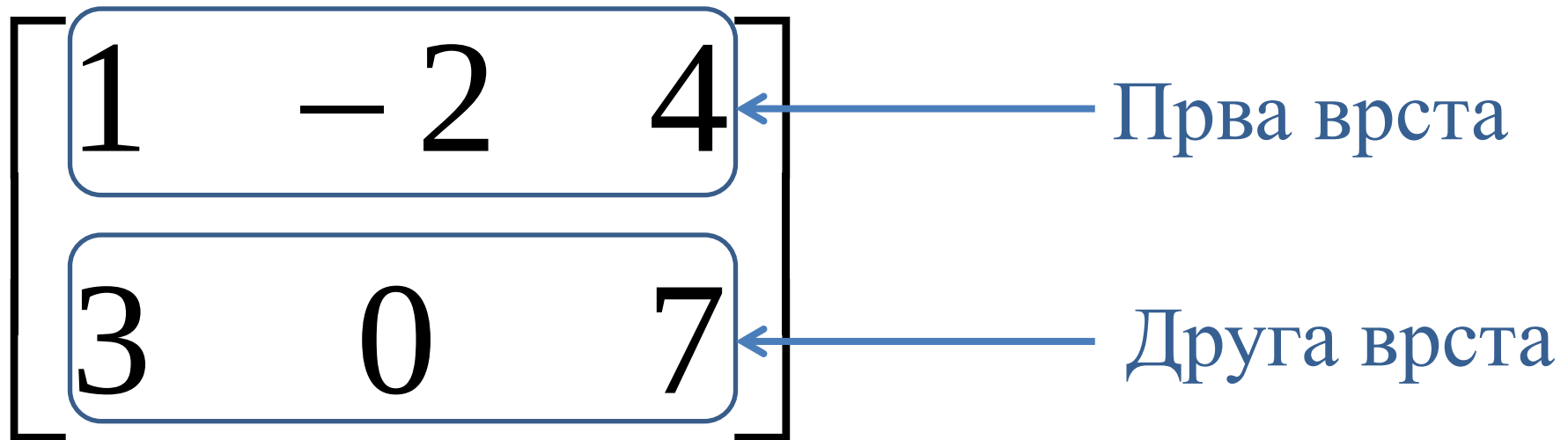
- Матрице
- Детерминанте
- Инверзна матрица

Предметни наставник:  
др Милош Цветковић

# Матрице – основни појмови

Матрица је правоугаона шема бројева.

Пример:  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$



Бројеви 1, -2 и 4 чине прву врсту матрице.

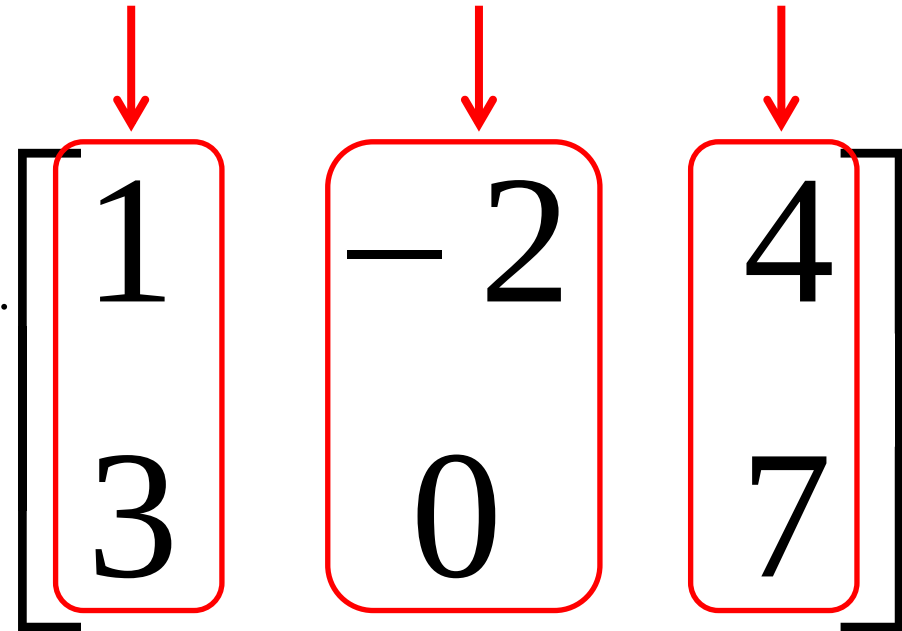
Бројеви 3, 0 и 7 чине другу врсту матрице.

Закључак: Дата матрица има две врсте.

# Матрице – основни појмови

Пример:  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Прва Друга Трећа  
колона колона колона



Бројеви 1 и 3 чине прву колону матрице.

Бројеви -2 и 0 чине другу колону матрице.

Бројеви 4 и 7 чине трећу колону матрице.

Закључак: Дата матрица има три колоне.

За матрицу  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$  кажемо да је типа  $2 \times 3$  (читамо: два пута три) јер има две врсте и три колоне.

# Матрице – основни појмови

Пример:  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Сваки елемент матрице налази се у пресеку једне врсте и једне колоне.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Елемент 1 се налази у пресеку прве врсте и прве колоне. Пишемо:  $a_{11} = 1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Елемент  $-2$  се налази у пресеку прве врсте и друге колоне. Пишемо:  $a_{12} = -2$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Елемент 4 се налази у пресеку прве врсте и треће колоне. Пишемо:  $a_{13} = 4$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Елемент 3 се налази у пресеку друге врсте и прве колоне. Пишемо:  $a_{21} = 3$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

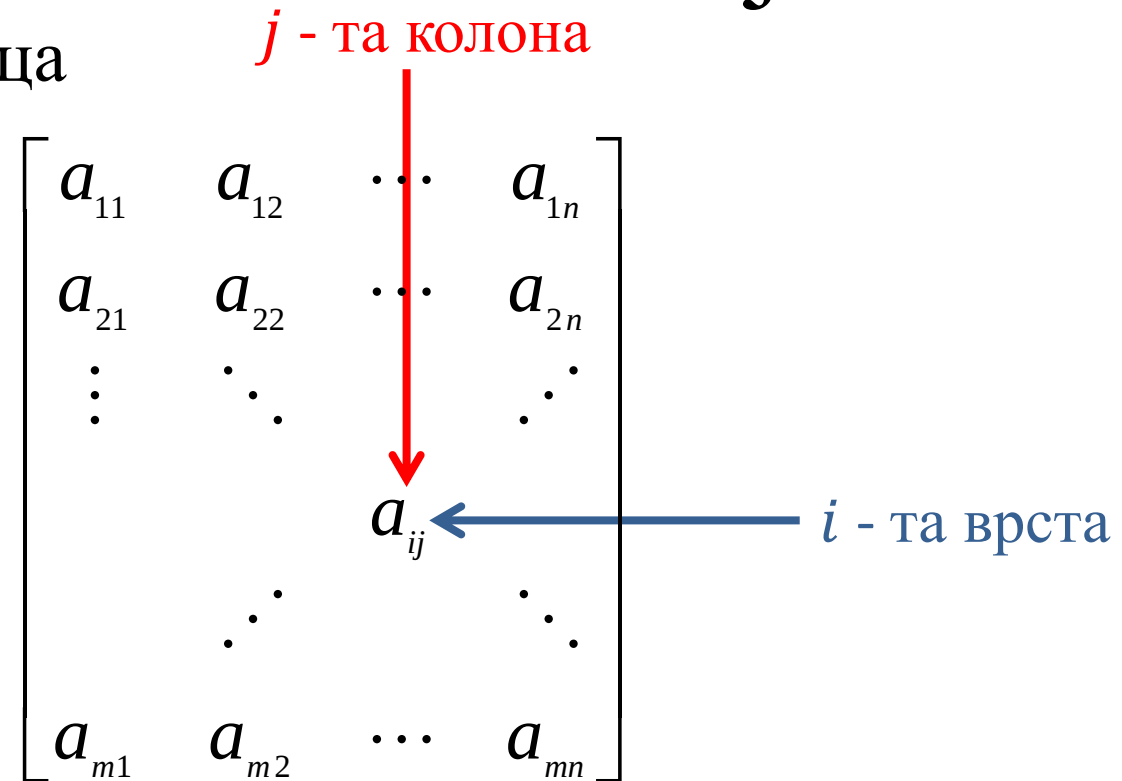
Елемент 0 се налази у пресеку друге врсте и друге колоне. Пишемо:  $a_{22} = 0$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

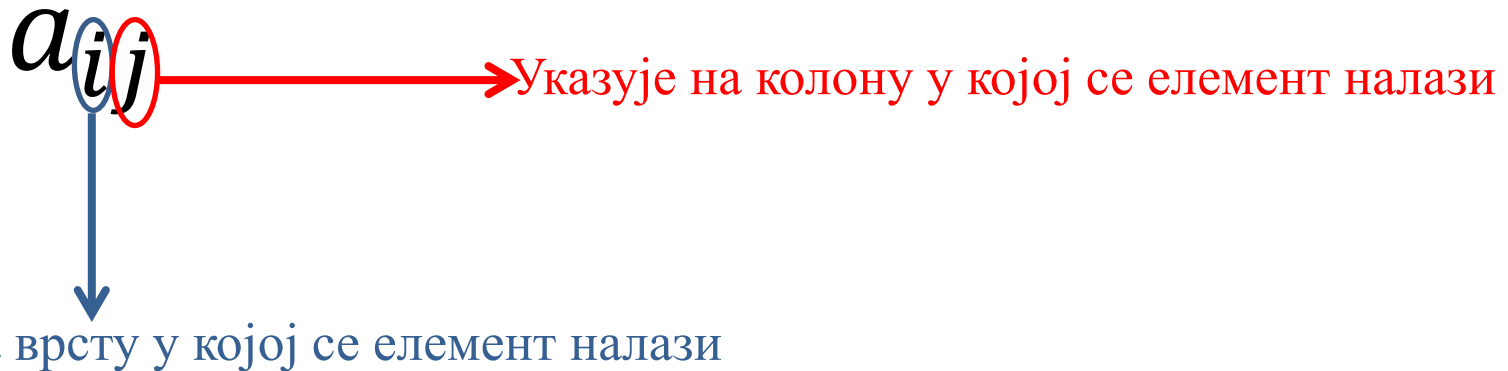
Елемент 7 се налази у пресеку друге врсте и треће колоне. Пишемо:  $a_{23} = 7$ .

# Матрице – основни појмови

Правоугаона таблица



са  $m$  врста и  $n$  колона назива се матрица типа  $m \times n$ .



# Матрице – основни појмови

Матрице се обично обележавају великим словима:  $A, B, C, \dots$

**Пример:**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Матрица  $A$  је типа  $2 \times 3$ , матрица  $B$  је типа  $3 \times 1$ , и матрица  $C$  је типа  $4 \times 4$ .

Ако је број врста једнак броју колона ( $m = n$ ), матрица је квадратна.

**Пример:** Матрица  $C$  је квадратна матрица реда 4 ( $m = n = 4$ ).

Две матрице  $A$  и  $B$  су једнаке ако су истог типа и ако је сваки елемент матрице  $A$  једнак одговарајућем елементу матрице  $B$ , тј.  $a_{ij} = b_{ij}$  за свако  $i$  и за свако  $j$ .

**Пример:** Матрице  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  и  $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & 2 - 1 \\ \sqrt{9} & 0 \end{bmatrix}$  су једнаке јер су истог типа  $2 \times 2$  и важи:  $a_{11} = 2 = \frac{4}{2} = b_{11}$ ,  $a_{12} = 1 = 2 - 1 = b_{12}$ ,  $a_{21} = 3 = \sqrt{9} = b_{21}$ ,  $a_{22} = 0 = b_{22}$ .

# Различити типови матрица

- Матрица која се састоји од једне врсте назива се **матрица-врста**; матрица која се састоји од једне колоне назива се **матрица-колона**.

**Пример:**  $[4 \ 0 \ 2 \ -1]$  је матрица-врста типа  $1 \times 4$ .  $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$  је матрица-колона типа  $3 \times 1$ .

- Матрица чији су сви елементи једнаки нули назива се **нула-матрица**.

**Пример:**  $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  је нула-матрица типа  $2 \times 4$ ;  $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  је нула-матрица типа  $2 \times 2$ .

- Матрица чије су колоне једнаке одговарајућим врстама матрице  $A$  назива се **транспонована матрица** матрице  $A$  и обележава се са  $A^T$ .

**Пример:**  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

**Пример:**  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

# Главна дијагонала квадратне матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Главну дијагоналу матрице  $A$  чине елементи:  
 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ .

Главна дијагонала  
квадратне матрице  $A$

Пример:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 3 & 9 \\ 5 & -3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

Главну дијагоналу матрице  $A$  чине елементи:  
1, 0, 3 и 8.

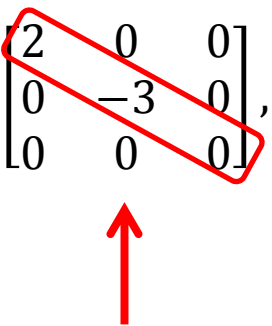
$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 7 \\ -2 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

Главну дијагоналу матрице  $G$  чине елементи:  
2, 8 и 11.

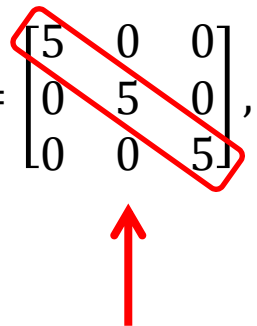
# Различити типови матрица - наставак

- Квадратна матрица која има елементе различите од нуле само на главној дијагонали, назива се **дијагонална матрица**. Сви елементи који се налазе изнад или испод главне дијагонале једнаки су нули.
- Ако су сви елементи главне дијагонале дијагоналне матрице међусобно једнаки, онда се таква матрица назива **скаларна матрица**.
- Скаларна матрица чији су сви елементи главне дијагонале једнаки 1, назива се **јединична матрица**. Јединична матрица се обележава са  $I$ . Уколико је јединична матрица реда  $n$  и уколико желимо да нагласимо њен ред, онда користимо ознаку  $I_n$ .

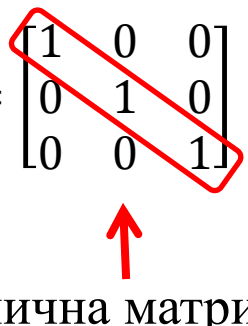
Пример:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$


Дијагонална матрица

$$S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$


Скаларна матрица

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


Јединична матрица  
Можемо писати и  $I_3$   
уместо  $I$

# Различити типови матрица - наставак

- Нека је  $A$  квадратна матрица. Матрица  $A$  је **симетрична** ако је  $A^T = A$ .

Пример:

$$C = \begin{bmatrix} 20 & 120 & 200 \\ 120 & 10 & 150 \\ 200 & 150 & 30 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 20 & 120 & 200 \\ 120 & 10 & 150 \\ 200 & 150 & 30 \end{bmatrix}, \quad C^T = C$$

Пример:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^T = A$$

Матрице  $C$  и  $A$  су симетричне матрице.

# Операције са матрицама – сабирање матрица

Нека су  $A$  и  $B$  матрице истог типа  $m \times n$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Збир матрица  $A$  и  $B$  је нова матрица типа  $m \times n$ , обележавамо је са  $A + B$ , и она изгледа овако:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Као што видимо, елементи матрице  $A + B$  се добијају сабирањем одговарајућих елемената матрица  $A$  и  $B$ .

**Ако матрице нису истог типа онда се оне не могу сабирати!**

# Операције са матрицама – сабирање матрица

**Пример:**  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Матрице  $A$  и  $B$  су истог типа  $2 \times 3$ , тако да збир  $A + B$  постоји.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+2 & -1+3 \\ -3+(-2) & 1+0 & 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Дакле:  $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Матрица  $A + B$  је такође типа  $2 \times 3$ .

# Операције са матрицама – множење матрице скаларом

Производ матрице  $A$  типа  $m \times n$  и скалара (броја)  $\lambda$  се записује као  $\lambda A$  и то је матрица такође типа  $m \times n$  и њени елементи се добијају тако што се сви елементи матрице  $A$  помноже са  $\lambda$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Пример:**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$  и  $\lambda = 3$ .

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}, \quad 3A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

# Операције са матрицама – множење матрице бројем $-1$

Множење матрице  $A$  бројем  $\lambda = -1$ : Уместо  $(-1)A$  пишемо једноставно  $-A$ .

За матрицу  $-A$  кажемо да је **супротна матрица** матрици  $A$ .

**Пример:**  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ . Наћи супротну матрицу матрици  $A$ .

$$-A = (-1)A = (-1) \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot (-5) & (-1) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 0 & (-1) \cdot 4 & (-1) \cdot (-7) \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Приметимо да је збир матрица  $A$  и  $-A$  једнак нула-матрици:

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

За сваку матрицу  $A$  важи:  $A + (-A) = O$ , где је  $O$  нула-матрица.

# Операције са матрицама – одузимање матрица

Одузимање матрица ћемо дефинисати помоћу појма супротне матрице.

Нека су  $A$  и  $B$  матрице истог типа  $m \times n$ . Разлика матрица  $A$  и  $B$  је матрица типа  $m \times n$  и дефинише се на следећи начин:

$$A - B = A + (-B)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad -B = (-1)B = \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \cdots & -b_{mn} \end{bmatrix}$$
$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \cdots & -b_{mn} \end{bmatrix}$$
$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

# Операције са матрицама – одузимање матрица

Као што смо видели – одузимање матрица се своди на одузимање одговарајућих елемената датих матрица.

Пример:  $C = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ . Наћи  $C - D$ .

$$C - D = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -3-0 & 0-(-6) \\ 0-8 & 1-1 & 5-9 \end{bmatrix}$$

$$C - D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

# Операције са матрицама - особине

Нека су матрице  $A, B$  и  $C$  истог типа  $m \times n$  и нека су  $\alpha$  и  $\beta$  бројеви. Тада важе следеће особине:

|                                                                            |                                          |
|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| $A + B = B + A$ <p>(комутативност сабирања матрица)</p>                    | $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$    |
| $(A + B) + C = A + (B + C)$ <p>(асоцијативност сабирања матрица)</p>       | $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ |
| $A + O = A$ <p>(нула-матрица је неутрални елемент за сабирање матрица)</p> | $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$       |
| $A + (-A) = O$                                                             | $1 \cdot A = A$                          |

# Операције са матрицама – докази неких особина

Због лакшег записивања узећемо да су матрице  $A, B$  и  $C$  типа  $2 \times 2$ , тј.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ и } C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

$$A + B = B + A$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} + b_{11} = b_{11} + a_{11} \text{ (за сабирање бројева важи комутативни закон)}$$

Из истог разлога:  $a_{12} + b_{12} = b_{12} + a_{12}$ ,  $a_{21} + b_{21} = b_{21} + a_{21}$  и  $a_{22} + b_{22} = b_{22} + a_{22}$ .

Матрице  $A + B$  и  $B + A$  су истог типа  $2 \times 2$  и њихови одговарајући елементи су једнаки, па закључујемо да је  $A + B = B + A$ . То значи да и за сабирање матрица важи **комутативни закон**.

# Операције са матрицама – докази неких особина

$$A + O = A$$

$$A + O = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 0 & a_{12} + 0 \\ a_{21} + 0 & a_{22} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

---

$$A + (-A) = O$$

Ову особину смо већ раније показали!

---

$$1 \cdot A = A$$

$$1 \cdot A = 1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} & 1 \cdot a_{12} \\ 1 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

# Операције са матрицама – докази неких особина

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\alpha(A + B) = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(a_{11} + b_{11}) & \alpha(a_{12} + b_{12}) \\ \alpha(a_{21} + b_{21}) & \alpha(a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix}$$

$$\alpha(A + B) = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} + \alpha b_{11} & \alpha a_{12} + \alpha b_{12} \\ \alpha a_{21} + \alpha b_{21} & \alpha a_{22} + \alpha b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\alpha A + \alpha B = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} + \alpha b_{11} & \alpha a_{12} + \alpha b_{12} \\ \alpha a_{21} + \alpha b_{21} & \alpha a_{22} + \alpha b_{22} \end{bmatrix}$$

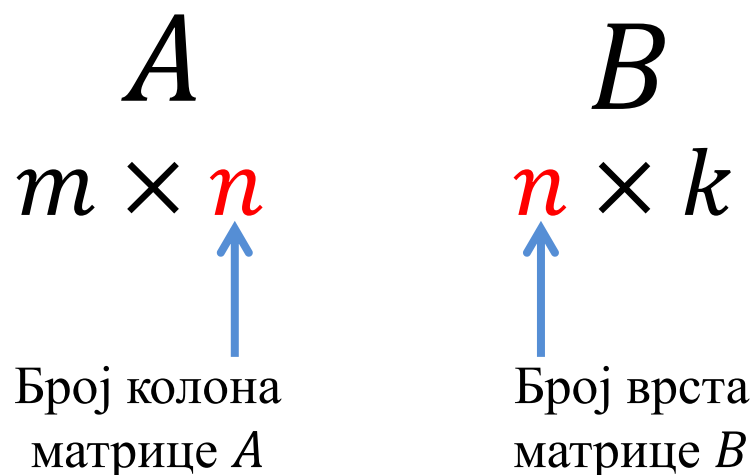
$$\alpha A + \alpha B = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} + \alpha b_{11} & \alpha a_{12} + \alpha b_{12} \\ \alpha a_{21} + \alpha b_{21} & \alpha a_{22} + \alpha b_{22} \end{bmatrix}$$

Матрице  $\alpha(A + B)$  и  $\alpha A + \alpha B$  су истог типа  $2 \times 2$  и сви одговарајући елементи су међусобно једнаки, па су и саме матрице  $\alpha(A + B)$  и  $\alpha A + \alpha B$  једнаке.

# Множење матрица

Производ матрица  $A$  и  $B$  је нова матрица коју ћемо обележити са  $AB$ .

Производ две матрице не постоји увек! **Производ матрица  $A$  и  $B$  је дефинисан ако матрица  $A$  има онолико колона колико матрица  $B$  има врста.**



Ако испишемо типове матрица  $A$  и  $B$  један до другог, онда унутрашњи бројеви морају да се поклапају. У том случају производ  $AB$  постоји и то је матрица типа  $m \times k$ , тј. матрица  $AB$  има онолико врста колико има матрица  $A$  и има онолико колона колико има матрица  $B$ .

# Множење матрица

**Специјалан случај – множење матрице-врсте и матрице-колоне**

$$\underbrace{[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]}_{n \text{ колона}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{n \text{ врста}} = \underbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}_{\text{Број}}$$

**Пример:**

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

# Множење матрица

Ако је  $A$  матрица типа  $m \times n$  и  $B$  је матрица типа  $n \times k$ , онда је производ  $AB$  матрица типа  $m \times k$  и елемент матрице  $AB$  који се налази у  $i$  —тој врсти и  $j$  —тој колони добија се множењем  $i$  —те врсте матрице  $A$  и  $j$  —те колоне матрице  $B$ .

**Пример:**  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \\ 9 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Наћи матрицу  $AB$ .

$$\begin{array}{cc} A & B \\ 3 \times 3 & 3 \times 4 \end{array}$$

Унутрашњи бројеви се поклапају,  
производ  $AB$  постоји и матрица  $AB$   
има 3 врсте и 4 колоне

# Множење матрица

Пример-наставак:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \\ 9 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{5} & \boxed{-1} \\ \boxed{4} & \boxed{0} & \boxed{2} \\ \boxed{-6} & \boxed{-3} & \boxed{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-2} & \boxed{3} & \boxed{1} \\ \boxed{5} & \boxed{0} & \boxed{7} & \boxed{8} \\ \boxed{9} & \boxed{-4} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{(AB)_{11}} & (AB)_{12} & (AB)_{13} & (AB)_{14} \\ (AB)_{21} & (AB)_{22} & (AB)_{23} & (AB)_{24} \\ (AB)_{31} & (AB)_{32} & (AB)_{33} & (AB)_{34} \end{bmatrix}$$

Овај елемент матрице  $AB$  се налази у првој врсти и првој колони, обележићемо га са  $(AB)_{11}$ . Он се добија множењем прве врсте матрице  $A$  и прве колоне матрице  $B$ :

$$(AB)_{11} = [3 \quad 5 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + (-1) \cdot 9 = 22$$

# Множење матрица

Пример-наставак:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{5} & \boxed{-1} \\ \boxed{4} & \boxed{0} & \boxed{2} \\ \boxed{-6} & \boxed{-3} & \boxed{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-2} & \boxed{3} & \boxed{1} \\ \boxed{5} & \boxed{0} & \boxed{7} & \boxed{8} \\ \boxed{9} & \boxed{-4} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{22} & \boxed{(AB)_{12}} & \boxed{(AB)_{13}} & \boxed{(AB)_{14}} \\ \boxed{(AB)_{21}} & \boxed{(AB)_{22}} & \boxed{(AB)_{23}} & \boxed{(AB)_{24}} \\ \boxed{(AB)_{31}} & \boxed{(AB)_{32}} & \boxed{(AB)_{33}} & \boxed{(AB)_{34}} \end{bmatrix}$$

$$(AB)_{12} = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot (-4) = -2$$

$$(AB)_{13} = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + (-1) \cdot 1 = 43$$

$$(AB)_{14} = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 8 + (-1) \cdot 1 = 42$$

$$(AB)_{21} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 9 = 26$$

$$(AB)_{22} = 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) = -16$$

$$(AB)_{23} = 4 \cdot 3 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 14$$

$$(AB)_{24} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot 1 = 6$$

$$(AB)_{31} = (-6) \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 9 = -9$$

$$(AB)_{32} = (-6) \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot (-4) = 4$$

$$(AB)_{33} = (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot 7 + 2 \cdot 1 = -37$$

$$(AB)_{34} = (-6) \cdot 1 + (-3) \cdot 8 + 2 \cdot 1 = -28$$

Матрица  $AB$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \\ 9 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -2 & 43 & 42 \\ 26 & -16 & 14 & 6 \\ -9 & 4 & -37 & -28 \end{bmatrix}$$

# Множење матрица

Ако су  $A$  и  $B$  матрице из претходног примера, да ли је дефинисан производ  $BA$ ?

$$\begin{array}{cc} B & A \\ 3 \times 4 & 3 \times 3 \end{array}$$


Унутрашњи бројеви се не поклапају,  
па зато матрица  $BA$  не постоји!

Може се десити да матрица  $BA$  постоји, али да је  $AB \neq BA$ .

**Пример:**  $A = [3 \quad 6 \quad 1], B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

$$\begin{array}{cc} A & B \\ 1 \times 3 & 3 \times 1 \end{array} \quad AB = [3 \quad 6 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = [3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 4] = [19]$$

$$\begin{array}{cc} B & A \\ 3 \times 1 & 1 \times 3 \end{array} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot [3 \quad 6 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 6 & 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 & 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot 6 & 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 2 \\ 12 & 24 & 4 \end{bmatrix}$$

Матрица  $AB$  је типа  $1 \times 1$ , матрица  $BA$  је типа  $3 \times 3$ , па је  $AB \neq BA$ .

**Закључак:** За множење матрица не важи комутативни закон! У општем случају:  $AB \neq BA$ .

# Множење матрица - особине

$$A(BC) = (AB)C$$

Асоцијативност множења

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

Дистрибутивност множења у односу на сабирање

Провера асоцијативног закона:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$BC = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 3 \cdot 0 + 6 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 12 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 & 12 \\ 13 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 21 + 4 \cdot 13 & 1 \cdot 12 + 4 \cdot 8 \\ 2 \cdot 21 + 2 \cdot 13 & 2 \cdot 12 + 2 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 & 44 \\ 68 & 40 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 22 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 7 & 22 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 + 22 \cdot 3 & 7 \cdot 0 + 22 \cdot 2 \\ 8 \cdot 1 + 20 \cdot 3 & 8 \cdot 0 + 20 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 & 44 \\ 68 & 40 \end{bmatrix}$$

# Пермутације

Посматрајмо бројеве 1 и 2.

Сваки распоред ових бројева зове се **ПЕРМУТАЦИЈА** бројева 1 и 2.

1 2

2 1

За пермутацију 1 2 кажемо да је **основна пермутација**. Имамо две пермутације.

---

Посматрајмо бројеве 1, 2 и 3.

Сваки распоред ових бројева зове се **ПЕРМУТАЦИЈА** бројева 1, 2 и 3.

|       |
|-------|
| 1 2 3 |
| 1 3 2 |
| 2 1 3 |
| 2 3 1 |
| 3 1 2 |
| 3 2 1 |

За пермутацију 1 2 3 кажемо да је **основна пермутација**. Имамо шест пермутација.

---

За пермутацију у којој су елементи поређани по величини кажемо да је  
**основна пермутација**.

# Инверзије

Ако у некој пермутацији већи број стоји испред мањег, тада се каже да ти елементи образују **ИНВЕРЗИЈУ**.

**Пример:**

У пермутацији 2 1 постоји једна инверзија јер се већи број 2 налази испред мањег броја 1.

Пермутација 2 3 1 има две инверзије: 2 је испред 1 и 3 је испред 1.

Каже се да је пермутација **парна** ако има паран број инверзија и да је **непарна** ако има непаран број инверзија. Парној пермутацији доделићемо знак „+“, а непарној знак „−“.

| Пермутација | Број инверзија | Знак |
|-------------|----------------|------|
| 1 2         | 0              | +    |
| 2 1         | 1              | −    |

| Пермутација | Број инверзија | Знак |
|-------------|----------------|------|
| 1 2 3       | 0              | +    |
| 1 3 2       | 1              | −    |
| 2 1 3       | 1              | −    |
| 2 3 1       | 2              | +    |
| 3 1 2       | 2              | +    |
| 3 2 1       | 3              | −    |

# Детерминанте

Нека је матрица  $A$  реда 2, тј.  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ .

Број  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , формиран од елемената матрице  $A$ , зове се **детерминанта другог реда** и обележава се са

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ или краће са } \det A.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Бројеви  $a_{11}$  и  $a_{22}$  чине **главну дијагоналу** детерминанте, док бројеви  $a_{12}$  и  $a_{21}$  чине **споредну дијагоналу** детерминанте.

Детерминанта другог реда се израчунава тако што се од производа елемената главне дијагонале одузме производ елемената споредне дијагонале.

Ако матрицу другог реда обележимо са  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , онда је

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

**Пример:**

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - (-3) \cdot 2 = 18 - (-6) = 18 + 6 = 24$$

# Детерминанте

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{1\textcolor{red}{1}}a_{2\textcolor{red}{2}} - a_{1\textcolor{red}{2}}a_{2\textcolor{red}{1}}$$

## ЗАПАЖАЊЕ:

- Израз за детерминанту другог реда се састоји од два члана:  $a_{11}a_{22}$  и  $a_{12}a_{21}$ ;
- Први индекси у сваком од чланова образују основну пермутацију 1 2;
- Други индекси образују све пермутације од бројева 1 и 2 (црвена боја);
- Испред сваког члана иде знак који одговара пермутацији коју чине други индекси.

| Пермутација                             | Број инверзија | Знак |
|-----------------------------------------|----------------|------|
| $\textcolor{red}{1} \textcolor{red}{2}$ | 0              | +    |
| $\textcolor{red}{2} \textcolor{red}{1}$ | 1              | —    |

# Детерминанте

Посматрајмо квадратну матрицу  $A$  реда 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Детерминанта трећег реда матрице  $A$  се обележава са  $\det A$  или са

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

и то је број

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

**Тешко је запамтити ову формулу!**

**Али постоји начин како можемо да је упамтимо!**

# Детерминанте

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

## ОВО ТРЕБА ЗАПАМТИТИ:

- Израз за детерминанту трећег реда се састоји од шест чланова;
- Први индекси у сваком од чланова образују основну пермутацију 1 2 3;
- Други индекси образују све пермутације од бројева 1, 2 и 3 (црвена боја);
- Испред сваког члана иде знак који одговара пермутацији коју чине други индекси.

| Пермутација | Број инверзија | Знак |
|-------------|----------------|------|
| 1 2 3       | 0              | +    |
| 1 3 2       | 1              | —    |
| 2 1 3       | 1              | —    |
| 2 3 1       | 2              | +    |
| 3 1 2       | 2              | +    |
| 3 2 1       | 3              | —    |

# Сарусово правило

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Горњу формулу за рачунање детерминанте трећег реда можемо упамтити и помоћу **Сарусовог правила**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \overline{a_{13}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{23}} \\ \overline{a_{31}} & \overline{a_{32}} & \overline{a_{33}} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

## САРУСОВО ПРАВИЛО:

- Са десне стране детерминанте дописати њене прве две колоне;
- За сваку плаву и за сваку црвену линију наћи производ три броја који се налазе на њој;
- Од збира производа на плавим линијама одузети збир производа на црвеним линијама;
- Сарусово правило важи само за детерминанте реда 3!!!

# Сарусово правило

## Пример:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= +(-3) \cdot 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 0 \cdot 5 - (-3) \cdot (-4) \cdot 6 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$

$$= 0 - 80 + 12 - 0 - 72 - 12 = -152$$

### Пример: Детерминанта дијагоналне матрице реда 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot a_{22} \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Детерминанта јединичне матрице реда 3 једнака је 1, тј.  $\det I_3 = 1$ .

# Особине детерминанте

Све наведене особине важе и за детерминанте другог и за детерминанте трећег реда.

**Детерминанта матрице се не мења транспоновањем.**

*Доказ* Због једноставности, узмимо матрицу другог реда  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Тада је:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad \det A^T = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Закључак:  $\det A = \det A^T$

**Ако матрица има врсту или колону састављену од нула, онда је њена детерминанта једнака нули.**

*Доказ* Нека је матрица  $A$  реда 3 и претпоставимо да је друга врста састављена од нула.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot 0 \cdot a_{33} + a_{12} \cdot 0 \cdot a_{31} + a_{13} \cdot 0 \cdot a_{32} - a_{13} \cdot 0 \cdot a_{31} - a_{11} \cdot 0 \cdot a_{32} - a_{12} \cdot 0 \cdot a_{33} = 0 \end{aligned}$$

Закључак:  $\det A = 0$

# Особине детерминанте

**Ако две врсте или две колоне матрице замене места, онда детерминанта мења знак.**

*Доказ* Опет због једноставности, узмимо матрицу другог реда  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Тада је:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Заменимо врстама матрице  $A$  места – добићемо нову матрицу  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}, \quad \det B = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\det A$$

Закључак:  $\det B = -\det A$

---

Сада ћемо колонама матрице  $A$  заменити места – добићемо нову матрицу  $C$ :

$$C = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}, \quad \det C = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\det A$$

Закључак:  $\det C = -\det A$

# Особине детерминанте

**Ако су две врсте или две колоне матрице међусобно једнаке, онда је детерминанта матрице једнака нули.**

*Доказ* Нека је матрица  $A$  реда 3 и претпоставимо да су прва и трећа врста међусобно једнаке.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ a & b \end{vmatrix} =$$

$$= aec + bfa + cdb - cea - afb - bdc = (aec - cea) + (bfa - afb) + (cdb - bdc) = 0$$

Закључак:  $\det A = 0$

---

Размотрићемо случај и када су две колоне матрице међусобно једнаке – нека су нпр. једнаке друга и трећа колона.

$$A = \begin{bmatrix} a & d & d \\ b & e & e \\ c & f & f \end{bmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a & d & d \\ b & e & e \\ c & f & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & d \\ b & e & e \\ c & f & f \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{vmatrix} =$$

$$= aef + dec + dbf - dec - aef - dbf = (aef - aef) + (dec - dec) + (dbf - dbf) = 0$$

Закључак:  $\det A = 0$

# Особине детерминанте

**Ако се сви елементи једне врсте или једне колоне матрице  $A$  помноже бројем  $\lambda$ , онда детерминанта новонастале матрице износи  $\lambda(\det A)$ .**

*Доказ* Нека је  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Тада је:  $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ . Помножимо, рецимо, прву врсту матрице  $A$  бројем  $\lambda$ . Добићемо неку нову матрицу  $B$  која изгледа овако:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det B = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda(\det A)$$

Закључак:  $\det B = \lambda(\det A)$

---

Сада ћемо размотрити случај када се елементи неке колоне множе бројем  $\lambda$ . Нека је опет  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  и  $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ . Помножимо сада, рецимо, другу колону матрице  $A$  бројем  $\lambda$ . Добићемо неку нову матрицу  $B$  која изгледа овако:

$$B = \begin{bmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{bmatrix}, \quad \det B = \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda(\det A)$$

Закључак:  $\det B = \lambda(\det A)$

# Минори и кофактори

Одбацивањем  $i$ -те врсте и  $j$ -те колоне у некој детерминанти добијамо нову детерминанту коју називамо **МИНОР** елемента  $a_{ij}$ . Минор елемента  $a_{ij}$  обележавамо са  $M_{ij}$ .

**Пример:**

Дата је матрица  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ . Њена детерминанта је  $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ .

Посматрајмо елемент  $a_{12} = 3$  и нађимо његов минор  $M_{12}$ . Треба избацити врсту и колону у чијем пресеку се налази елемент  $a_{12} = 3$ . У нашем примеру то су прва врста и друга колона.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot 6 - 4 \cdot (-2) = 8$$

**Кофактор (алгебарски комплемент) елемента  $a_{ij}$  је број  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .**

$$(-1)^1 = -1, (-1)^2 = 1, (-1)^3 = -1, (-1)^4 = 1, \dots$$

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1, i+j \text{ парно} \\ -1, i+j \text{ непарно} \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$a_{33} = 6, M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \cdot 8 = (-1) \cdot 8 = -8$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 1 \cdot 4 = 4$$

# Лапласов развој детерминанте трећег реда

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

| $a_{11}$                                                                                                              | $a_{12}$                                                                                                              | $a_{13}$                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$<br>$M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ | $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$<br>$M_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$ | $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$<br>$M_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$ |
| $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$<br>$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$                                                 | $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}$<br>$A_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$                                                 | $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}$<br>$A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$                                                 |

Сетимо се дефиниције детерминанте:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \overbrace{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} + \overbrace{-a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Лапласов развој  
детерминанте по првој врсти

# Лапласов развој детерминанте трећег реда

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Веза између алгебарских компонената и минора:

|                                                   |                                                   |                                                   |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$<br>$A_{11} = M_{11}$  | $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}$<br>$A_{12} = -M_{12}$ | $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}$<br>$A_{13} = M_{13}$  |
| $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21}$<br>$A_{21} = -M_{21}$ | $A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22}$<br>$A_{22} = M_{22}$  | $A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23}$<br>$A_{23} = -M_{23}$ |
| $A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31}$<br>$A_{31} = M_{31}$  | $A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32}$<br>$A_{32} = -M_{32}$ | $A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33}$<br>$A_{33} = M_{33}$  |

Детерминанта се може развити по било којој врсти или колони:

|                                                       |                                                        |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ | $\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$  |
| $\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$ | $\det A = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$ |
| $\det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$ | $\det A = a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33}$  |
| $\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$ | $\det A = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$  |
| $\det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$ | $\det A = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}$ |
| $\det A = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$ | $\det A = a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}$  |

# Лапласов развој детерминанте трећег реда

**Пример:** Израчунати детерминанту  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ .

**Развијање детерминанте по првој врсти:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(2 \cdot 6 - 4 \cdot 5) - 3(0 \cdot 6 - 4(-2)) - (0 \cdot 5 - 2(-2)) =$$
$$= 2 \cdot (-8) - 3 \cdot 8 - 4 = -16 - 24 - 4 = -44$$

---

**Развијање детерминанте по трећој колони:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -(0 \cdot 5 - 2(-2)) - 4(2 \cdot 5 - 3(-2)) + 6(2 \cdot 2 - 3 \cdot 0) =$$
$$= -4 - 4 \cdot 16 + 6 \cdot 4 = -4 - 64 + 24 = -44$$

**У оба случаја смо добили исти резултат!**

# Инверзна матрица матрице типа $2 \times 2$

Каже се да је квадратна матрица реда 2 **регуларна (инвертибилна)** ако постоји матрица  $B$  такође реда 2 таква да је

$$AB = I \quad \text{и} \quad BA = I,$$

где је  $I$  јединична матрица реда 2, тј.  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Матрица  $B$  се назива **инверзна матрица** матрице  $A$  и обележава се са  $B = A^{-1}$ . За матрицу која није регуларна каже се да је **сингуларна**.

Нека је  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

|              |              |                                              |
|--------------|--------------|----------------------------------------------|
| $a_{11} = a$ | $M_{11} = d$ | $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$<br>$A_{11} = d$  |
| $a_{12} = b$ | $M_{12} = c$ | $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}$<br>$A_{12} = -c$ |
| $a_{21} = c$ | $M_{21} = b$ | $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21}$<br>$A_{21} = -b$ |
| $a_{22} = d$ | $M_{22} = a$ | $A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22}$<br>$A_{22} = a$  |

# Поступак добијања инверзне матрице

**Корак 1:** Израчунати детерминанту матрице  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Уколико је  $\det A = 0$  онда матрица  $A$  нема инверзну матрицу!  
Ако је  $\det A \neq 0$ , онда прећи на корак 2.

**Корак 2:** Формирати кофактор матрицу  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

Кофактор матрица се добија тако што се сваки елемент матрице  $A$  замени одговарајућим кофактором:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**Корак 3:** Формирати адјунговану матрицу  $\text{adj } A$

Адјунгована матрица се добија транспоновањем кофактор матрице:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**Корак 4:** Инверзна матрица  $A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

# Инверзна матрица - пример

Да ли матрица  $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  има инверзну матрицу? Ако има, онда наћи  $A^{-1}$ .

У нашем примеру је:  $a = 4, b = 5, c = 2, d = 3$ . Детерминанта матрице  $A$  је  $\det A = 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 2$  и то је број који је различит од нуле, што значи да матрица  $A$  има инверзну матрицу.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Провера:**

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot \frac{3}{2} + 5 \cdot (-1) & 4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 5 \cdot 2 \\ 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot 4 + \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 2 & \frac{3}{2} \cdot 5 + \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 & (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

# Инверзна матрица матрице типа $3 \times 3$

Каже се да је квадратна матрица реда 3 **регуларна (инвертибилна)** ако постоји матрица  $B$  такође реда 3 таква да је

$$AB = I \quad \text{и} \quad BA = I,$$

где је  $I$  јединична матрица реда 3, тј.  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Матрица  $B$  се назива **инверзна матрица** матрице  $A$  и обележава се са  $B = A^{-1}$ .

За матрицу која није регуларна каже се да је **сингуларна**.

# Поступак добијања инверзне матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

**Корак 1:** Израчунати детерминанту матрице  $A$   $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Уколико је  $\det A = 0$  онда матрица  $A$  нема инверзну матрицу!

Ако је  $\det A \neq 0$ , онда прећи на корак 2.

**Корак 2:** Формирати кофактор матрицу матрице  $A$

Кофактор матрица се добија тако што се сваки елемент матрице  $A$  замени одговарајућим кофактором. Кофактор матрица изгледа овако:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

**Корак 3:** Формирати адјунговану матрицу  $\text{adj } A$

Адјунгована матрица се добија транспонованјем кофактор матрице:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

**Корак 4:** Инверзна матрица  $A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

# Инверзна матрица - пример

Да ли матрица  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix}$  има инверзну матрицу? Ако има - наћи  $A^{-1}$ .

## Корак 1: Детерминанта

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{vmatrix} = -(-2) \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = \\ &= 2(30 - 18) - 3(15 - 12) - 6(-6 - (-8)) = 2 \cdot 12 - 3 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 24 - 9 - 12 = 3 \end{aligned}$$

$\det A \neq 0 \rightarrow$  матрица  $A$  има инверзну матрицу

## Корак 2: Кофактор матрица

|                                                                                       |                                                                                         |                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 15 \end{vmatrix}$<br>$A_{11} = -9$  | $A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 15 \end{vmatrix}$<br>$A_{12} = -12$ | $A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$<br>$A_{13} = 3$   |
| $A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 15 \end{vmatrix}$<br>$A_{21} = 6$ | $A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 15 \end{vmatrix}$<br>$A_{22} = 3$     | $A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$<br>$A_{23} = 0$ |
| $A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}$<br>$A_{31} = 0$  | $A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$<br>$A_{32} = -2$   | $A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$<br>$A_{33} = 1$   |

# Инверзна матрица - пример

**Корак 2:** Кофактор матрица

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -12 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Корак 3:** Адјунгована матрица

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -9 & 6 & 0 \\ -12 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Корак 4:** Инверзна матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -9 & 6 & 0 \\ -12 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

# Инверзна матрица - пример

Провера:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 8 - 4 & 2 - 2 + 0 & 0 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \\ -6 + 12 - 6 & 4 - 3 + 0 & 0 + 2 - 2 \\ 9 - 24 + 15 & -6 + 6 + 0 & 0 - 4 + 5 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 4 + 0 & 6 - 6 + 0 & 12 - 12 + 0 \\ -4 + 2 + 2 & 8 - 3 - 4 & 16 - 6 - 10 \\ 1 + 0 - 1 & -2 + 0 + 2 & -4 + 0 + 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$