

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18. јануар 2024. године

Име и презиме

Бр. индекса

Смер:

ЗНР

ЗЖС

ЗОП

ЗАДАЦИ

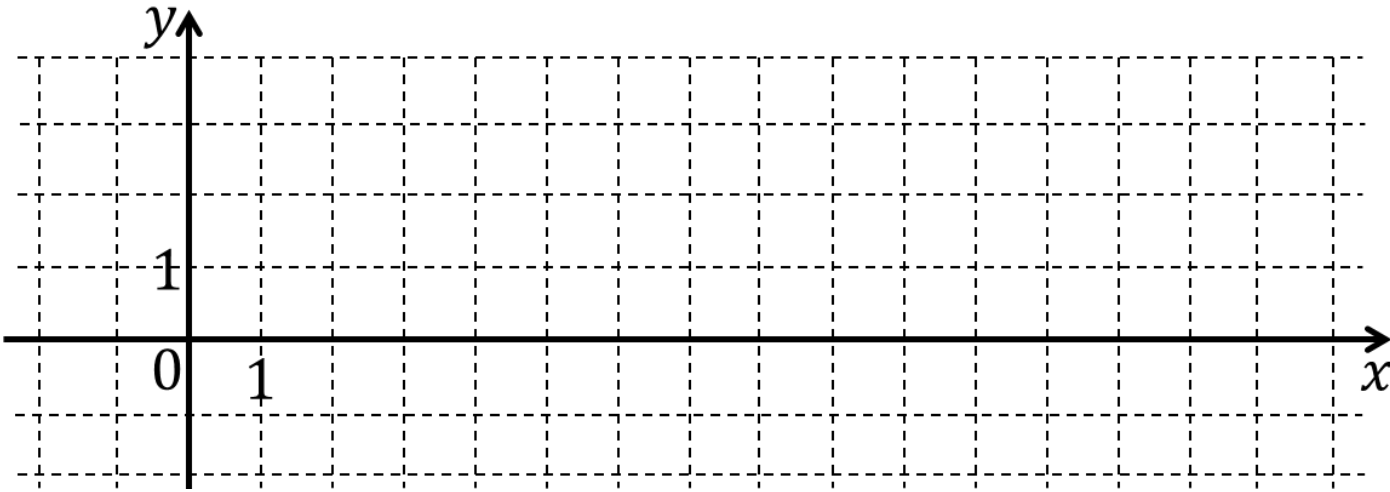
Бр. поена: /25

1. Дата је функција $f(x) = \sqrt{x}$.

(а) Попунити таблицу:

x	0	1	4	9	16
$f(x)$					

(б) Користећи таблицу, скицирати график функције $f(x) = \sqrt{x}$.



2. Дата је функција $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$. Заокружити слово испред тачног одговора.

(а) Функција f је парна.

(б) Функција f је непарна.

(в) Функција f је нити парна
нити непарна.

3. Наћи први и трећи члан низа чији је општи члан $a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$.

$a_1 =$

$a_3 =$

4. Наћи граничну вредност низа $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+5n^2}{n+n^2} =$$

5. Израчунати граничну вредност $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+3x}{x^2-x-12}$.

6. Ако је $f(x) = 0,001x^5 - 0,02x^3$, наћи први извод f' и други извод f'' .

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

7. Наћи први извод функције: (а) $g(t) = \frac{1}{\ln t}$ (б) $f(x) = (3x^2 - 5x)e^x$.

$$(a) g'(t) =$$

$$(b) f'(x) =$$

8. Сменом $t = \cos x$ решити интеграл $\int \cos^3 x \sin x \, dx$.

9. Методом парцијалне интеграције решити интеграл $\int x^4 \ln x \, dx$. Узети да је $u = \ln x$ и $dv = x^4 dx$.

10. Извод функције f у тачки $x = a$ обележава се са $f'(a)$ и дефинише се на следећи начин:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(а) Користећи ову дефиницију, наћи први извод функције $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$ у тачки $a = 2$.

(б) Користећи део (а), наћи једначину тангенте криве $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$ у тачки $(2,2)$.

11. Наћи први извод функције $f(x) = \frac{3-2x}{5x+1}$.

$$f'(x) = \left(\frac{3-2x}{5x+1} \right)' =$$

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ - КЉУЧ

18. јануар 2024. године

Име и презиме

Бр. индекса

Смер:

ЗНР

ЗЖС

ЗОП

ЗАДАЦИ

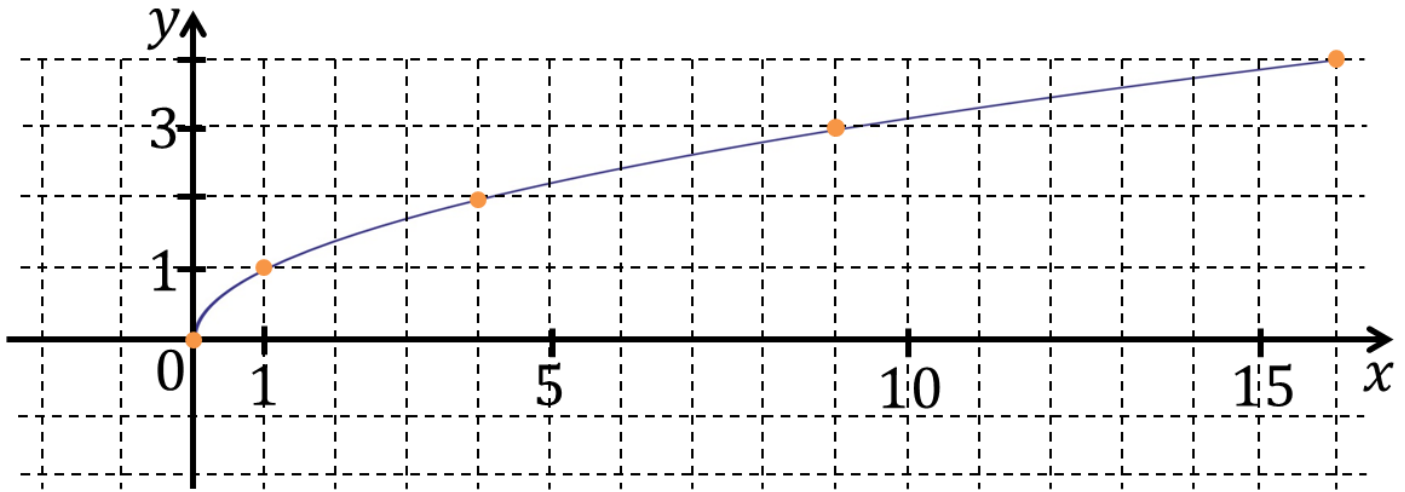
Бр. поена: /25

1. Дата је функција $f(x) = \sqrt{x}$.

(а) Попунити таблицу:

x	0	1	4	9	16
$f(x)$	0	1	2	3	4

(б) Користећи таблицу, скицирати график функције $f(x) = \sqrt{x}$.



2. Дата је функција $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$. Заокружити слово испред тачног одговора.

- (a) Функција f је парна. (б) Функција f је непарна. (в) Функција f је нити парна нити непарна.

$f(-x) = 1 + 3(-x)^2 - (-x)^4 = 1 + 3x^2 - x^4 = f(x) \rightarrow$ Пошто је $f(-x) = f(x)$, функ. f је парна.

3. Наћи први и трећи члан низа чији је општи члан $a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$.

$$a_1 = \frac{(-1)^1(1+1)}{3^1} = -\frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3(3+1)}{3^3} = -\frac{4}{27}$$

4. Наћи граничну вредност низа $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+5n^2}{n+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(5 + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{5}{1} = 5$$

5. Израчунати граничну вредност $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+3x}{x^2-x-12}$.

$$x^2 - x - 12 = 0, a = 1, b = -1, c = -12, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}, \quad x_1 = -3, x_2 = 4$$

$$x^2 - x - 12 = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x + 3)}{(x + 3)(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{x - 4} = \frac{-3}{-3 - 4} = \frac{3}{7}$$

6. Ако је $f(x) = 0,001x^5 - 0,02x^3$, наћи први извод f' и други извод f'' .

$$f'(x) = (0,001x^5 - 0,02x^3)' = (0,001x^5)' - (0,02x^3)' = 0,001 \cdot 5x^4 - 0,02 \cdot 3x^2 = 0,005x^4 - 0,06x^2$$

$$f''(x) = (0,005x^4 - 0,06x^2)' = (0,005x^4)' - (0,06x^2)' = 0,005 \cdot 4x^3 - 0,06 \cdot 2x = 0,02x^3 - 0,12x$$

7. Наћи први извод функције: (а) $g(t) = \frac{1}{\ln t}$ (б) $f(x) = (3x^2 - 5x)e^x$.

$$(a) g'(t) = \left(\frac{1}{\ln t}\right)' = \frac{1' \cdot \ln t - 1 \cdot (\ln t)'}{(\ln t)^2} = -\frac{\frac{1}{t}}{(\ln t)^2} = -\frac{1}{t(\ln t)^2}$$

$$(b) f'(x) = [(3x^2 - 5x)e^x]' = (3x^2 - 5x)'e^x + (3x^2 - 5x)(e^x)' = (6x - 5)e^x + (3x^2 - 5x)e^x = [(6x - 5) + (3x^2 - 5x)]e^x = (3x^2 + x - 5)e^x$$

8. Сменом $t = \cos x$ решити интеграл $\int \cos^3 x \sin x dx$.

$$\text{Смена: } t = \cos x \rightarrow dt = (\cos x)' dx \rightarrow dt = -\sin x dx \rightarrow \sin x dx = -dt$$

$$\int \cos^3 x \sin x dx = -\int t^3 dt = -\frac{1}{4}t^4 + C = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$$

9. Методом парцијалне интеграције решити интеграл $\int x^4 \ln x dx$. Узети да је $u = \ln x$ и $dv = x^4 dx$.

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \quad dv = x^4 dx \rightarrow v = \frac{1}{5}x^5$$

$$\int x^4 \ln x dx = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \int \frac{1}{5}x^5 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{5} \int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{5} \cdot \frac{x^5}{5} + C = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{25}x^5 + C$$

10. Извод функције f у тачки $x = a$ обележава се са $f'(a)$ и дефинише се на следећи начин:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(а) Користећи ову дефиницију, наћи први извод функције $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$ у тачки $a = 2$.

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{5(2+h)}{1+(2+h)^2} - \frac{5 \cdot 2}{1+2^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{5h+10}{1+4+4h+h^2} - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{5h+10-2(h^2+4h+5)}{h^2+4h+5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h^2-3h}{h(h^2+4h+5)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2h-3)}{h(h^2+4h+5)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h-3}{h^2+4h+5} = -\frac{3}{5}$$

(б) Користећи део (а), наћи једначину тангенте криве $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$ у тачки $(2,2)$.

$$\text{Једначина тангенте: } y = kx + n, \quad k = f'(2) = -\frac{3}{5}, \quad y = -\frac{3}{5}x + n.$$

$$\text{Тачка } (2,2) \text{ припада тангенти, па је } 2 = -\frac{3}{5} \cdot 2 + n = -\frac{6}{5} + n \rightarrow n = \frac{16}{5}.$$

$$\text{Једначина тангенте: } y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}.$$

11. Наћи први извод функције $f(x) = \frac{3-2x}{5x+1}$.

$$f'(x) = \left(\frac{3-2x}{5x+1}\right)' = \frac{(3-2x)'(5x+1) - (3-2x)(5x+1)'}{(5x+1)^2} = \frac{-2(5x+1) - (3-2x) \cdot 5}{(5x+1)^2} =$$
$$= \frac{-10x-2-15+10x}{(5x+1)^2} = -\frac{17}{(5x+1)^2}$$