

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

6. децембар 2023. године

Име и презиме

Бр. индекса

Смер:

ЗНР

ЗЖС

ЗОП

Број поена: /25

1. Нека је $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Број врста матрице B је _____ и број колона матрице B је _____.

2. Дата је матрица $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Матрица C је (заокружити слово испред тачног одговора):

(а) јединична матрица

(б) нула-матрица

(в) скаларна матрица

(г) матрица-врста

3. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ и $H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Наћи матрицу HA .

4. Израчунати минор M_{23} и кофактор A_{23} матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

$M_{23} =$

$A_{23} =$

5. Дата је матрица $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Наћи $\det B$ користећи Лапласов развој по другој врсти.

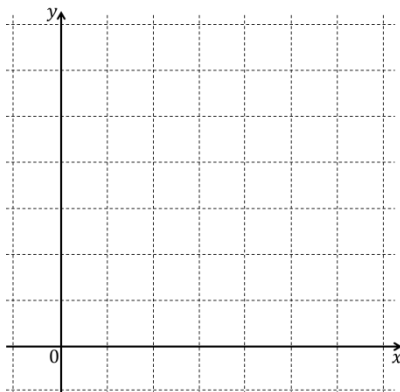
$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$

6. Дат је систем једначина $\begin{cases} -3x - 5y = 4 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$. Решити овај систем једначина матричном методом.

7. Вектор $\vec{u} = (2, 4)$ има почетак у тачки $P(4,3)$.

(а) Означимо са Q крај вектора $\vec{u}$. Наћи координате тачке Q .

(б) Скицирати вектор $\vec{u}$.



8. Дат је вектор $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Наћи интензитет вектора $\vec{a}$, а потом и његов јединични вектор.

9. Дати су вектори $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Наћи угао (у степенима) између вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

10. Дати су вектори $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$. Наћи векторски производ $\vec{a} \times \vec{b}$.

11. Наћи скаларне параметарске једначине праве која пролази кроз тачке $P(6, -2, -3)$ и $Q(4, 1, -2)$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ - КЉУЧ

6. децембар 2023. године

Име и презиме	Бр. индекса
Смер:	ЗНР ЗЖС ЗОП
Број поена: /25	

1. Нека је $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Број врста матрице B је 3 (три) и број колона матрице B је 1 (један).
2. Дата је матрица $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Матрица C је (заокружити слово испред тачног одговора): (а) јединична матрица ☒ (в) скаларна матрица (б) нула-матрица (г) матрица-врста
3. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ и $H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Наћи матрицу HA. $HA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot (-5) + 1 \cdot 7 \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-5) + (-1) \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -17 \end{bmatrix}$ $HA = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -17 \end{bmatrix}$
4. Израчунати минор M_{23} и кофактор A_{23} матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$ $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \cdot 0 = (-1) \cdot 0 = 0$
5. Дата је матрица $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Наћи $\det B$ користећи Лапласов развој по другој врсти. $\det B = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ $= 2 \cdot (1 \cdot 3 - 0 \cdot 0) - 1 \cdot (4 \cdot 3 - 4 \cdot 0) - (4 \cdot 0 - 4 \cdot 1) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 12 - (-4) = 6 - 12 + 4 = -2$
6. Дат је систем једначина $\begin{cases} -3x - 5y = 4 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$. Решити овај систем једначина матричним методом. $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad a = -3, \quad b = -5, \quad c = 2, \quad d = 3; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad AX = B; \quad X = A^{-1} \cdot B$ $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{(-3) \cdot 3 - (-5) \cdot 2} \begin{bmatrix} 3 & -(-5) \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ $X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 \\ (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}; \quad x = 12, y = -8; \quad (x, y) = (12, -8)$

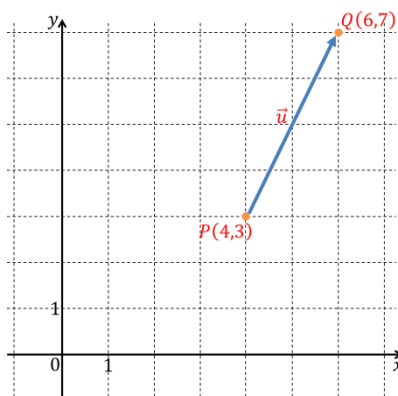
7. Вектор $\vec{u} = (2, 4)$ има почетак у тачки $P(4,3)$.

(а) Означимо са Q крај вектора $\vec{u}$. Наћи координате тачке Q .

Крај вектора: тачка $Q(x, y)$, Почетак вектора: тачка $P(4,3) \rightarrow \vec{u} = (x - 4, y - 3) = (2, 4)$

$$x - 4 = 2 \rightarrow x = 6, \quad y - 3 = 4 \rightarrow y = 7, \quad Q(6, 7)$$

(б) Скицирати вектор $\vec{u}$.



8. Дат је вектор $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Наћи интензитет вектора $\vec{a}$, а потом и његов јединични вектор.

$$\vec{a} = (1, 1, -3) \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}$$

Јединични вектор: $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{11}} (\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k})$, $\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{11}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{11}} \vec{j} - \frac{3}{\sqrt{11}} \vec{k}$, $\vec{a}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}} \right)$

9. Дати су вектори $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Наћи угао (у степенима) између вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

$$\vec{u} = (0, 1, 1), \quad \vec{v} = (1, 2, -3)$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{28}} \approx -0,18898$$

$$\varphi = \arccos(-0,18898) = 100,9^\circ$$

10. Дати су вектори $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$. Наћи векторски производ $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\vec{a} = (1, 1, 1), \quad \vec{b} = (3, 0, -4)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(1 \cdot (-4) - 1 \cdot 0) - \vec{j}(1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3) + \vec{k}(1 \cdot 0 - 1 \cdot 3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -4\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k} = (-4, 7, -3)$$

11. Наћи скаларне параметарске једначине праве која пролази кроз тачке $P(6, -2, -3)$ и $Q(4, 1, -2)$.

Узећемо да је вектор $\overrightarrow{PQ}$ вектор правца посматране праве, тј. $\vec{p} = \overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (4 - 6, 1 - (-2), -2 - (-3)) = (-2, 3, 1)$$

$$\vec{p} = (l, m, n) = (-2, 3, 1)$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (6, -2, -3) \quad \leftarrow \quad \text{тачка } P$$

Скаларне параметарске једначине праве:

$$x = x_0 + lt$$

$$x = 6 - 2t$$

$$y = y_0 + mt$$

$$y = -2 + 3t$$

$$z = z_0 + nt$$

$$z = -3 + t$$

t је параметар који припада скупу реалних бројева.