

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19. јануар 2023. године

Име и презиме

Бр. индекса

Смер:

ЗНР

ЗЖС

ЗОП

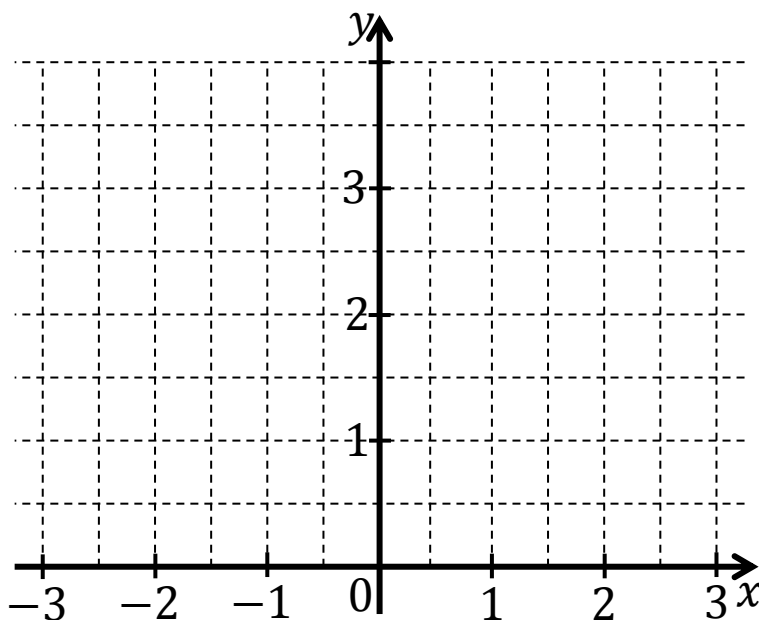
Прва група задатака

1. Дата је функција $f(x) = 2^x$.

(а) Попунити таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

(б) Користећи таблицу, скицирати график функције $f(x) = 2^x$.



2. (а) Ако функција f задовољава $f(-x) = f(x)$ за сваки број x из њеног домена, тада је f _____ функција.

(б) Ако функција f задовољава $f(-x) = -f(x)$ за сваки број x из њеног домена, тада је f _____ функција.

(в) Испитати да ли је функција $f(x) = x^5 + x$ парна, непарна или није ни парна ни непарна.

3. Исписати првих десет чланова Фибоначијевог низа.

Фибоначијев низ: __, __, __, __, __, __, __, __, __, __

4. Наћи граничну вредност низа $a_n = \frac{n^2 - 3n + 5}{3n^2 - 4n + 1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 5}{3n^2 - 4n + 1} =$$

5. Израчунати граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$.

6. Ако је $f(x) = e^x - x$, наћи први извод f' и други извод f'' .

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

7. Наћи први извод функције: (a) $g(t) = \frac{\ln t}{t}$ (б) $f(x) = x \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

$$(a) g'(t) =$$

$$(б) f'(x) =$$

8. Методом замене решити интеграл $\int \cos^3 x \, dx$.

9. Методом парцијалне интеграције решити интеграл $\int \ln x \, dx$.

Друга група задатака

10. Извод функције f у тачки $x = a$ обележава се са $f'(a)$ и дефинише се на следећи начин:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(a) Користећи ову дефиницију, наћи први извод функције $f(x) = 4x - 3x^2$ у тачки $x = 2$.

(б) Користећи део (a), наћи једначину тангенте криве $f(x) = 4x - 3x^2$ у тачки $(2, -4)$.

11. Дата је функција $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.

(а) Наћи интервале на којима функција f расте и интервале на којима функција f опада.

(б) Наћи локалне екстремне вредности функције f .

БОДОВАЊЕ		
1. задатак	2	
2. задатак	2	
3. задатак	1	
4. задатак	2	
5. задатак	2	
6. задатак	2	
7. задатак	2	
8. задатак	2	
9. задатак	2	
10. задатак	4	
11. задатак	4	
УКУПНО	25	

ПРОСТОР ЗА РАЧУНАЊЕ

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ - КЉУЧ

19. јануар 2023. године

Име и презиме

Бр. индекса

Смер:

ЗНР

ЗЖС

ЗОП

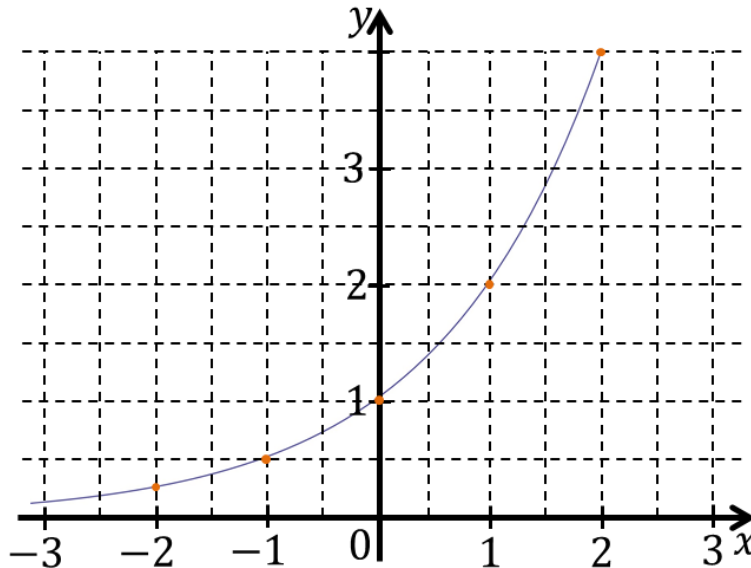
Прва група задатака

1. Дата је функција $f(x) = 2^x$.

(а) Попунити таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

(б) Користећи таблицу, скицирати график функције $f(x) = 2^x$.



2. (а) Ако функција f задовољава $f(-x) = f(x)$ за сваки број x из њеног домена, тада је f **ПАРНА** функција.

(б) Ако функција f задовољава $f(-x) = -f(x)$ за сваки број x из њеног домена, тада је f **НЕПАРНА** функција.

(в) Испитати да ли је функција $f(x) = x^5 + x$ парна, непарна или није ни парна ни непарна.

$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x)$; Функција f је непарна.

3. Исписати првих десет чланова Фибоначијевог низа.

Фибоначијев низ: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

4. Наћи граничну вредност низа $a_n = \frac{n^2 - 3n + 5}{3n^2 - 4n + 1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 5}{3n^2 - 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{3 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{3}$$

5. Израчунати граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$.

$$x^2 - 6x + 5 = 0, a = 1, b = -6, c = 5, x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}, x_1 = 5, x_2 = 1$$

$$x^2 - 6x + 5 = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x - 1)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x - 1) = 4$$

6. Ако је $f(x) = e^x - x$, наћи први извод f' и други извод f'' .

$$f'(x) = (e^x - x)' = (e^x)' - x' = e^x - 1$$

$$f''(x) = (e^x - 1)' = (e^x)' - 1' = e^x$$

7. Наћи први извод функције: (а) $g(t) = \frac{\ln t}{t}$ (б) $f(x) = x \arctg \sqrt{x}$.

$$(a) g'(t) = \frac{(\ln t)' \cdot t - \ln t \cdot t'}{t^2} = \frac{\frac{1}{t} t - \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

$$(b) f'(x) = x' \cdot \arctg \sqrt{x} + x \cdot (\arctg \sqrt{x})' = \arctg \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \arctg \sqrt{x} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \arctg x + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$$

8. Методом замене решити интеграл $\int \cos^3 x \, dx$.

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$$

Смена: $t = \sin x \rightarrow dt = (\sin x)' dx \rightarrow dt = \cos x \, dx$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int (1 - t^2) dt = \int dt - \int t^2 dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

9. Методом парцијалне интеграције решити интеграл $\int \ln x \, dx$.

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \quad dv = dx \rightarrow v = x$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Друга група задатака

10. Извод функције f у тачки $x = a$ обележава се са $f'(a)$ и дефинише се на следећи начин:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(а) Користећи ову дефиницију, наћи први извод функције $f(x) = 4x - 3x^2$ у тачки $x = 2$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4(2+h) - 3(2+h)^2] - [4 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 4h - 3(4 + 4h + h^2) - (-4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 4h - 12 - 12h - 3h^2 + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-3h - 8) = -8 \end{aligned}$$

(б) Користећи део (а), наћи једначину тангенте криве $f(x) = 4x - 3x^2$ у тачки $(2, -4)$.

Једначина тангенте: $y = kx + n$, $k = f'(2) = -8$, $y = -8x + n$.

Тачка $(2, -4)$ припада тангенти, па је $-4 = -8 \cdot 2 + n = -16 + n \rightarrow n = 12$.

Једначина тангенте: $y = -8x + 12$

11. Дата је функција $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.

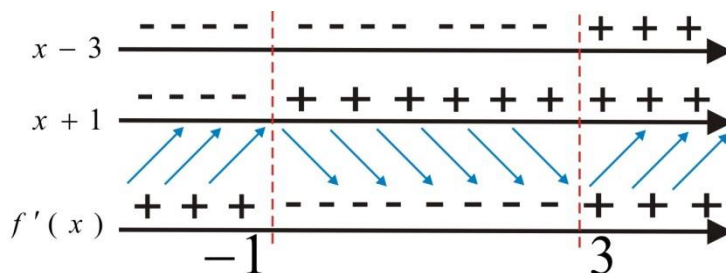
(а) Наћи интервале на којима функција f расте и интервале на којима функција f опада.

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + 4)' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0, a = 1, b = -2, c = -3, x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}, x_1 = 3, x_2 = -1$$

$$x^2 - 2x - 3 = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

$$f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)$$



Функција f је растућа на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(3, +\infty)$, а опадајућа на интервалу $(-1, 3)$.

(б) Наћи локалне екстремне вредности функције f .

Локални максимум: $f(-1) = 9$

Локални минимум: $f(3) = -23$

БОДОВАЊЕ		
1. задатак	2	
2. задатак	2	
3. задатак	1	
4. задатак	2	
5. задатак	2	
6. задатак	2	
7. задатак	2	
8. задатак	2	
9. задатак	2	
10. задатак	4	
11. задатак	4	
УКУПНО	25	