МАТЕМАТИКА

Писани део испита - Јануарско-фебруарски рок - 26. 2. 2026.

ЗАДАЦИ

1. Испитати ток и конструисати график функције: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$.

2. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 4z = 4 \\ 4x + 6y = 4 \end{cases}$$

3. Наћи инверзну матрицу следеће матрице:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Израчунати површину фигуре која је ограничена правом $y = x$ и параболом $y = (x-2)^2$. Скицирати слику.

Напомена. Израда задатака траје 3 сата. Дозвољена је употреба калкулатора; није дозвољена употреба мобилних телефона.

Математика - Јануарско-фебруарски рок - 26. 2. 2026. - КЉУЧ

$\boxed{1.}$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$

1° Област дефинисаности

$x^2 \geqslant 0$ за сваки реалан број x;
$x^2+3>0$ за сваки реалан број x;
Закључујемо да израз x^2+3 који се налази испод разломачке црте не може никада бити једнак 0, па домен функције чине сви реални бројеви.

$\mathcal{D}(f)=(-\infty,+\infty)$

2° Нуле функције

Израз $\dfrac{1}{x^2+3}$ је количник два позитивна броја и никада не може узети вредност 0.

Функција нема нуле - пресек са x-осом не постоји.

3° Пресек са y-осом

$f(0)=\dfrac{1}{0^2+3}=\dfrac{1}{3}$; $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

4° Знак функције

Како је x^2+3 позитиван број за сваки реалан број x, то онда значи да је и функција позитивна за сваки реалан број x.

f је позитивна на инт. $(-\infty,+\infty)$.

5° Парност

$f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2+3}=\dfrac{1}{x^2+3}=f(x)$

Функција f је парна.

6° Асимптоте

В.А. - нема

Х.А.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{x^2}}=0\cdot 1=0$$

Сл. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2+3}=0$. Права $y=0$ (x-оса) је Х.А. када $x\to\pm\infty$.

7° Монотоност и екстремне вредности

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x^2+3}\right)'=\frac{1'\cdot(x^2+3)-1\cdot(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$$

$$=-\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$-2x$:	+ + + + + +		− − − − − − −
$(x^2+3)^2$:	+ + + + + +		+ + + + + + +
	↗ ↗ ↗ ↗		↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘
$f'(x)$:	+ + + + + +		− − − − − − −

f расте на инт. $(-\infty,0)$;

f опада на инт. $(0,+\infty)$.

У тачки $x=0$ функција f има локални максимум.

$f(0)=\dfrac{1}{0^2+3}=\dfrac{1}{3}$; $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$.

Математика – Јануарско-фебруарски рок – 26.2.2026. – КЉУЧ

8° Конвексност, конкавност и превојне тачке

$$f''(x)=\left(-\frac{2x}{(x^2+3)^2}\right)'=-\left(\frac{2x}{(x^2+3)^2}\right)'=-\frac{(2x)'(x^2+3)^2-2x\cdot\left((x^2+3)^2\right)'}{(x^2+3)^4}=$$

$$=-\frac{2\cdot(x^2+3)^2-2x\cdot 2\cdot(x^2+3)\cdot(x^2+3)'}{(x^2+3)^4}=-\frac{2\cdot(x^2+3)^2-4x\cdot(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}=$$

$$=-\frac{2\cdot(x^2+3)^2-8x^2\cdot(x^2+3)}{(x^2+3)^4}=\frac{8x^2\cdot(x^2+3)-2\cdot(x^2+3)^2}{(x^2+3)^4}=\frac{2(x^2+3)\left[4x^2-(x^2+3)\right]}{(x^2+3)^4}=$$

$$=\frac{2\cdot(3x^2-3)}{(x^2+3)^3}=\frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}\ ;\quad f''(x)=\frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}.$$

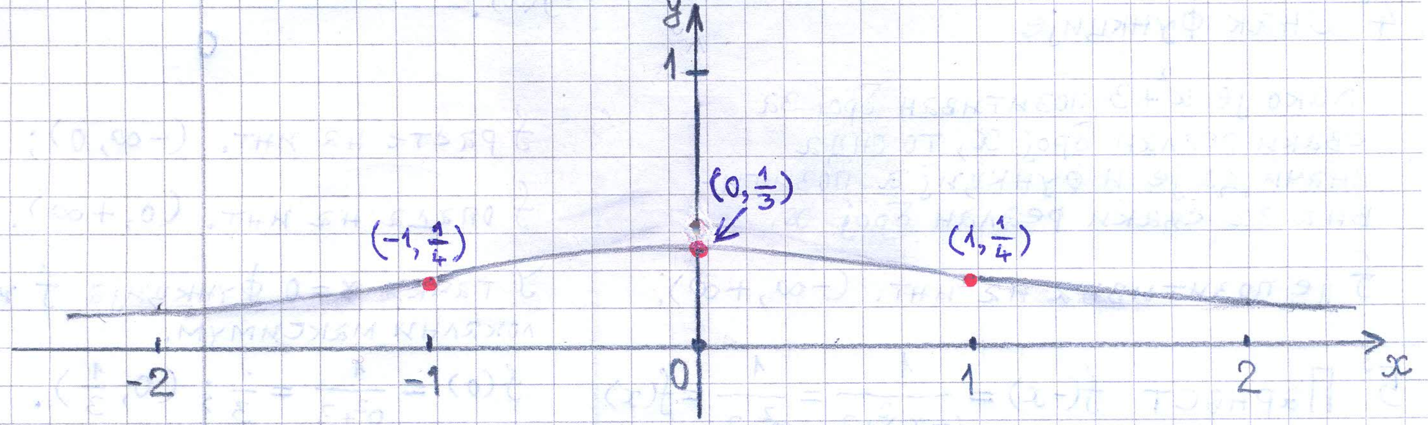
	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
x^2-1:	+ + + +	− − − −	+ + + +
$(x^2+3)^3$:	+ + + +	+ + + +	+ + + +
$f''(x)$:	+ + + +	− − − −	+ + + +

f је конвексна на инт. $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$;

f је конкавна на инт. $(-1,1)$.

$f(-1)=\frac{1}{(-1)^2+3}=\frac{1}{4}$, $f(1)=\frac{1}{1^2+3}=\frac{1}{4}$; Превојне тачке су: $(-1,\frac{1}{4})$ и $(1,\frac{1}{4})$.

9° График



2.

$$\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ 2x+\quad 4z=4 \\ 4x+6y \quad =4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}B3]{\frac{1}{2}B2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)B1+B3\to B3]{(-1)B1+B2\to B2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}B2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{3B2+B3\to B3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ y-\frac{4}{3}z=-\frac{2}{3} \end{cases} \qquad z=t; \quad y-\frac{4}{3}t=-\frac{2}{3}$$

$$y=-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}t$$

$$x+3\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}t\right)-2t=0$$

$$x-2+4t-2t=0$$

$$x-2+2t=0$$

$$x=2-2t$$

Систем има бесконачно много решења:

$$(x,y,z)=\left(2-2t,-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}t,t\right),\ t\in\mathbb{R}$$

Математика - Јануарско-фебруарски рок - 26. 2. 2026. - КЉУЧ

$\boxed{3.}$

$$A=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 3 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

1° Детерминанта матрице A

$$\det A=\begin{vmatrix}0 & -2 & 2\\ 3 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(3\cdot3-3\cdot1)+2\cdot(3\cdot(-2)-1\cdot1)=12-14=-2$$

$\det A=-2$; Како је $\det A=-2\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ постоји ;

2° Кофактор матрица

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{vmatrix}=1\cdot3-3\cdot(-2)=9$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(3\cdot3-3\cdot1)=-6$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)-1\cdot1=-7$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-\left((-2)\cdot3-2\cdot(-2)\right)=2$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=0\cdot3-2\cdot1=-2$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-\left(0\cdot(-2)-(-2)\cdot1\right)=-2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - 2\cdot 1 = -8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(0\cdot 3 - 2\cdot 3) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot 1 - (-2)\cdot 3 = 6$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -7 \\ 2 & -2 & -2 \\ -8 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

3° Адјунгована матрица

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -7 \\ 2 & -2 & -2 \\ -8 & 6 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -8 \\ -6 & -2 & 6 \\ -7 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

4° Инверзна матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A, \quad A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & 2 & -8 \\ -6 & -2 & 6 \\ -7 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Пресек праве $y=x$ и параболе $y=(x-2)^2$:

$x=(x-2)^2$, $x=x^2-4x+4$, $x^2-4x+4-x=0$,

$x^2-5x+4=0$

$$x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm3}{2}$$

$x_1=\frac{5-3}{2}=1$

$x_2=\frac{5+3}{2}=4$

Пресечне тачке су $(1,1)$ и $(4,4)$.

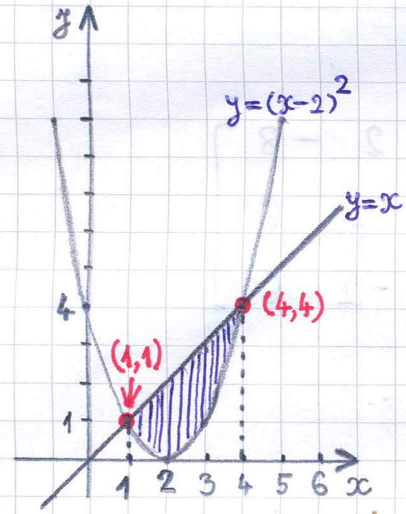
$y=x$ → права

x	-1	0	1	2	3	4
$y=x$	-1	0	1	2	3	4

$y=(x-2)^2$ → парабола

Нуле функ: $(x-2)^2=0$
$x-2=0$
$x=2$

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y=(x-2)^2$	9	4	1	0	1	4	9



Шрафирана површина:

$$P=\int_1^4\left[x-(x-2)^2\right]dx=\int_1^4\left[x-(x^2-4x+4)\right]dx=$$

$$=\int_1^4(x-x^2+4x-4)\,dx=\int_1^4(-x^2+5x-4)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Big|_1^4=\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{5\cdot4^2}{2}-4\cdot4\right)-$$

$$-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right)=-\frac{64}{3}+40-16+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4=\left(-\frac{64}{3}+\frac{1}{3}\right)+(40-16+4)-\frac{5}{2}=$$

$$=-21+28-\frac{5}{2}=7-\frac{5}{2}=\frac{14}{2}-\frac{5}{2}=\frac{9}{2};\quad P=\frac{9}{2}.$$