МАТЕМАТИКА

Писани део испита - Априлски рок - 7. 4. 2026.

ЗАДАЦИ

1. Испитати ток и конструисати график функције: $f(x) = x^4 - 4x^3$.

2. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + 5z = 11 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

3. Наћи инверзну матрицу следеће матрице:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Израчунати површину фигуре која је ограничена кубном параболом $y = x^3$ и правом $y = x$. Скицирати слику.

Напомена. Израда задатака траје 3 сата. Дозвољена је употреба калкулатора; није дозвољена употреба мобилних телефона.

Математика - Априлски рок - 7.4.2026. - КЉУЧ

1. $f(x) = x^4 - 4x^3$

1° Област дефинисаности

Функција f. је полином.

$D(f) = (-\infty, +\infty)$

2° Нуле функције

$x^4 - 4x^3 = 0$

$x^3(x-4) = 0$

$x^3 = 0$ или $x - 4 = 0$

$x = 0$ или $x = 4$

$(0,0)$ и $(4,0)$

3° Пресек са y- осом

$f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0$

$(0,0)$

4° Знак функције

$f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4)$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,+\infty)$
x^3:	$- -$		$+ + \; + + \; + + \; + + \; + +$		$+ +$
$x-4$:	$- -$		$- - \; - - \; - - \; - - \; - -$		$+ +$
$f(x)$:	$+ +$		$- - \; - - \; - - \; - -$		$+ +$

0 1 2 3 4

f је позитивна на инт. $(-\infty, 0)$ и $(4, +\infty)$.

f је негативна на инт. $(0, 4)$.

5° Парност

$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3$

$-f(x) = -x^4 + 4x^3$

$f(-x) \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$

Функција није ни парна ни непарна.

6° Асимптоте

В.А. - нема

Х.А.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 4x^3) = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(1 - \frac{4}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^4 \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{4}{x}\right) = \infty \cdot 1 = \infty$$

Слично: $\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 4x^3) = \infty$

Закључак: Х.А. - нема

7° Монотоност и екстремне вредности

$f'(x) = (x^4 - 4x^3)' = (x^4)' - (4x^3)'$

$= 4x^3 - 4(x^3)' = 4x^3 - 4 \cdot 3x^2$;

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$;

$f'(x) = 4x^2(x-3)$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$4x^2$:	$+$		$+ + \; + + \; + +$		$+ + \; + +$
$x-3$:	$-$		$- - \; - - \; - -$		$+ + \; + +$
$f'(x)$:	$\searrow -$		$\searrow - \; \searrow - \; \searrow -$		$\nearrow + \; \nearrow +$

0 1 2 3 4

f опада на инт. $(-\infty, 0)$ и $(0, 3)$.

f расте на инт. $(3, +\infty)$.

У тачки $x = 3$ функција има локални минимум.

$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$; $(3, -27)$

У тачки $x = 0$ не постоји локални екстремум.

8° Конвексност, конкавност и превојне тачке

$f''(x) = (4x^3 - 12x^2)' = (4x^3)' - (12x^2)' = 4(x^3)' - 12(x^2)'$;

$f''(x) = 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x$; $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
x:	$-$	$+$	$+$
$x-2$:	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$:	$+$ ∪	$-$ ∩	$+$ ∪

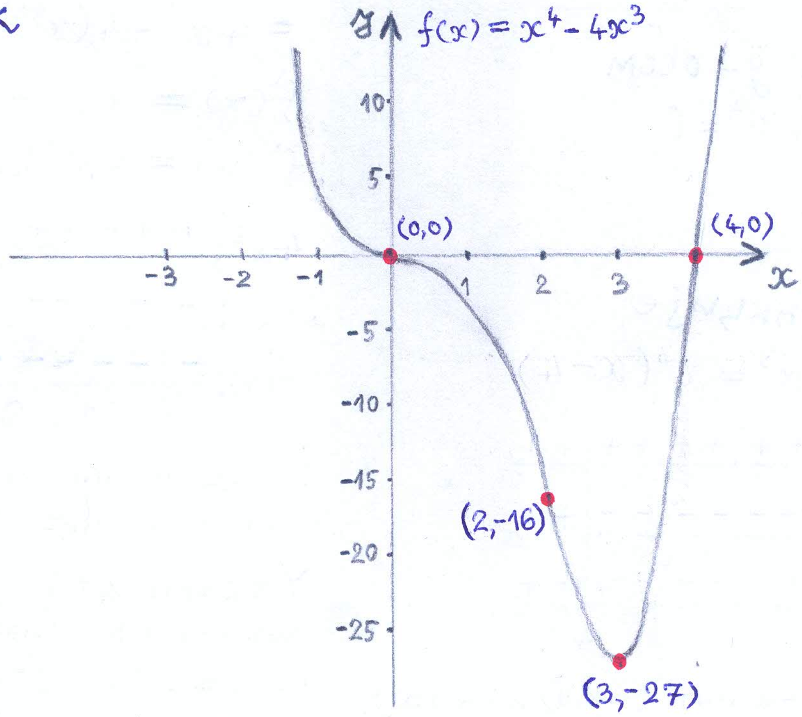
Функција је конвексна на инт. $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$.

Функција је конкавна на инт. $(0, 2)$.

$f(0) = 0$, $f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 = -16$.

Превојне тачке су $(0,0)$ и $(2,-16)$.

9° График



2.

$$\begin{cases} x+y-2z=3 \\ 2x+5z=11 \\ 2x+3y=12 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)\text{В}1+\text{В}3\to\text{В}3]{(-2)\text{В}1+\text{В}2\to\text{В}2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{В}2\leftrightarrow\text{В}3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 9 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{В}2+\text{В}3\to\text{В}3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{17}\text{В}3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y-2z=3 \\ y+4z=6 \\ z=1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y+4\cdot 1&=6 \\ y+4&=6 \\ y&=2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2-2\cdot 1&=3 \\ x+2-2&=3 \\ x&=3 \end{aligned}$$

Систем има јединствено решење: $(x,y,z)=(3,2,1)$.

3.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1° Детерминанта матрице A

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (4\cdot(-1)-1\cdot 1) - 4\cdot(2\cdot(-1)-1\cdot(-1)) = -5-4\cdot(-1) = -5+4=-1$$

$\det A = -1$;

Како је $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ постоји.

2° Кофактор матрица

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 4 = 4;$

$M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1;$ $A_{11} = M_{11} = 4,\ A_{12} = -M_{12} = -1,$

$A_{13} = M_{13} = -5$

$M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 - 1 \cdot 1 = -5;$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 1 \cdot 4 = -4;$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1;$ $A_{21} = -M_{21} = 4,\ A_{22} = M_{22} = -1,$

$A_{23} = -M_{23} = -4$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 4;$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -5;$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 1(-1) = -1;$ $A_{31} = M_{31} = -5,\ A_{32} = -M_{32} = 1,$

$A_{33} = M_{33} = 6$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4(-1) = 6;$

Кофактор матрица: $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & -4 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

3° Адјунгована матрица

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & -4 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

4° Инверзна матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A, \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & -4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

4. $y = x^3$ – кубна парабола

$y = x$ – права

Пресечне тачке: $x^3 = x$, $x^3 - x = 0$, $x(x^2-1) = 0$,

$x(x-1)(x+1) = 0$;

$x = 0$ или $x - 1 = 0$ или $x + 1 = 0$; $x = 0, 1, -1$;

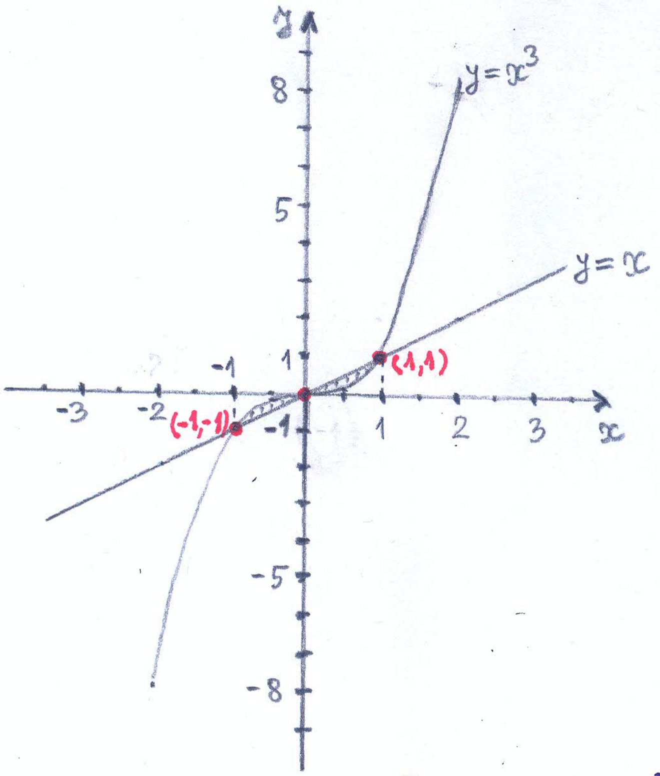
Пресечне тачке су: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

$y = x^3$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=x^3$	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8

$y = x$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=x$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2



$$P = 2\cdot\int_0^1 (x - x^3)\,dx = 2\cdot\left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1\right] = 2\cdot\left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4}\right)\right] =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2};\quad P = \frac{1}{2}.$$