

МАТЕМАТИКА

Писани део испита - Јануарско-фебруарски рок - 5. 2. 2024.

ЗАДАЦИ

1. Испитати ток и конструисати график функције: $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

2. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 13 \\ -x + 2y - 5z = 6 \\ 5x - y - z = 49 \end{cases}$$

3. Израчунати интеграл: $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} dx$.

4. Израчунати површину фигуре која је ограничена линијама $y = x^2$ и $y = 2x - x^2$.
Скицирати слику.

Напомена. Израда задатака траје 3 сата. Дозвољена је употреба калкулатора; није дозвољена употреба мобилних телефона.

1. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

1° Област дефинисаности

$$x^2 \neq 0, x \neq 0$$

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

2° Нуле функције

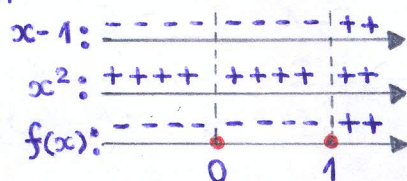
$$f(x) = 0, \frac{x-1}{x^2} = 0, x-1 = 0, x = 1;$$

$$(1, 0).$$

3° Пресек са y-осом

Не постоји пресек са y-осом
јер функција није дефинисана у
тачки $x = 0$.

4° Знак функције



f је негативна на инт. $(-\infty, 0)$ и $(0, 1)$;

f је позитивна на инт. $(1, +\infty)$.

5° Парност

$$f(-x) = \frac{-x-1}{(-x)^2} = \frac{-x-1}{x^2}$$

Функција није ни парна ни
непарна.

6° Асимптоте

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot (1-\frac{1}{x}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (1-\frac{1}{x}) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\text{На исти начин се добија: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0$$

Правa $y = 0$ (x-оса) је хоризонтална
асимптота графика функције f и када
 $x \rightarrow +\infty$ и када $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty;$$

Правa $x = 0$ (y-оса) је вертикална
асимптота графика функције f .

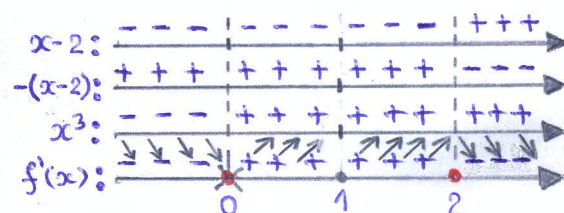
7° Монотоност и екстремне
вредности

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)' = \frac{(x-1)' \cdot x^2 - (x-1)(x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot x^2 - (x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4};$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x(x-2)}{x^4};$$

$$f'(x) = \frac{-(x-2)}{x^3}$$



f расте на инт. $(0, 2)$;

f опада на инт. $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$.

У тачки $x = 2$ функција f има
локални максимум.

$$f(2) = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4}; \left(2, \frac{1}{4}\right).$$

8° Конвексност, конкавност
и превојне тачке

$$f''(x) = \left(\frac{-(x-2)}{x^3}\right)' = -\left(\frac{x-2}{x^3}\right)' =$$

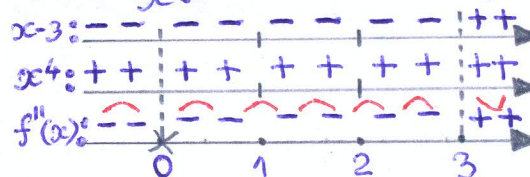
$$= -\frac{(x-2)' \cdot x^3 - (x-2) \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} =$$

$$= -\frac{1 \cdot x^3 - (x-2) \cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$= -\frac{x^3 - 3x^3 + 6x^2}{x^6} =$$

$$= -\frac{-2x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6}$$

$$= \frac{2x^2(x-3)}{x^6}; f''(x) = \frac{2(x-3)}{x^4}$$



f је конкавна на инт. $(-\infty, 0)$
и $(0, 3)$;

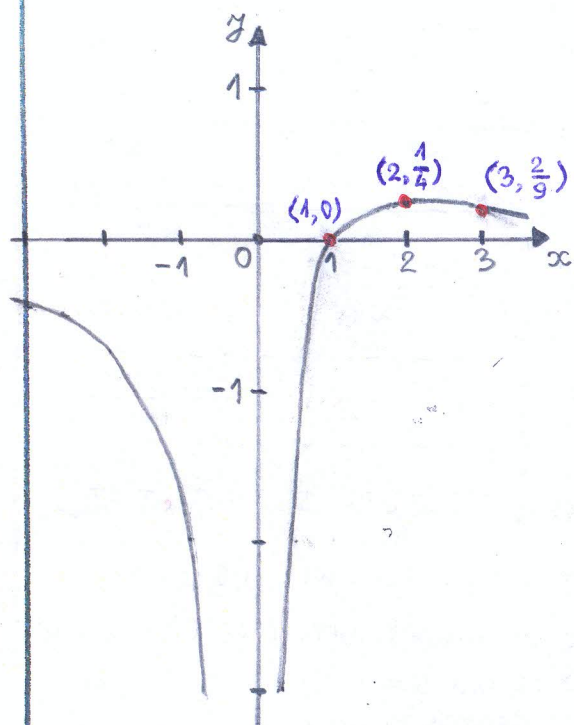
f је конвексна на инт. $(3, +\infty)$.

$$\text{Превојна тачка: } f(3) = \frac{2}{9}$$

$$\left(3, \frac{2}{9}\right).$$



9° Цртање графика



$$2. \begin{cases} 2x - 3y - z = 13 \\ -x + 2y - 5z = 6 \\ 5x - y - z = 49 \end{cases} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 13 \\ -1 & 2 & -5 & 6 \\ 5 & -1 & -1 & 49 \end{bmatrix} \xrightarrow{B1 \leftrightarrow B2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & -3 & -1 & 13 \\ 5 & -1 & -1 & 49 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)B1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 13 \\ 5 & -1 & -1 & 49 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)B1 + B2 \rightarrow B2 \\ (-5)B1 + B3 \rightarrow B3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -11 & 25 \\ 0 & 9 & -26 & 79 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-9)B2 + B3 \rightarrow B3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -11 & 25 \\ 0 & 0 & 73 & -146 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{73}B3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -11 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = -6 \\ y - 11z = 25 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$y - 11 \cdot (-2) = 25$$

$$y + 22 = 25$$

$$y = 3$$

$$x - 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = -6$$

$$x - 6 - 10 = -6$$

$$x - 16 = -6$$

$$x = 10$$

Систем има јединствено решење: $(x, y, z) = (10, 3, -2)$.



$$3. \int \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} dx;$$

Подинтегрална функција је $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)}$ и то је рационална функција.

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A \cdot \cancel{(x+1)(x+2)}}{x+1} + \frac{B \cdot \cancel{(x+2)}}{(x+1)^2} + \frac{C \cdot \cancel{(x+1)^2}}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A(x^2 + 2x + x + 2) + Bx + 2B + C(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2(x+2)};$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A(x^2 + 3x + 2) + Bx + 2B + Cx^2 + 2Cx + C}{(x+1)^2(x+2)};$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{Ax^2 + 3Ax + 2A + Bx + 2B + Cx^2 + 2Cx + C}{(x+1)^2(x+2)};$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{(A+C)x^2 + (3A+B+2C)x + (2A+2B+C)}{(x+1)^2(x+2)};$$

$$\left. \begin{aligned} A + C &= 1 \\ 3A + B + 2C &= 1 \\ 2A + 2B + C &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ Систем линеарних једначина, непознате су } A, B \text{ и } C. \text{ Решимо систем Крамеровим правилом.}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) + (3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = -3 + 4 = 1; \quad D = 1$$

$$D_A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) + (1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -3 + 1 = -2; \quad D_A = -2$$



3. (наставак)

$$D_B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - (3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) + (3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) =$$

$$= -1 - (-1) + 1 = -1 + 1 + 1 = 1; \quad D_B = 1$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + (3 \cdot 2 - 1 \cdot 2) =$$

$$= -1 + 4 = 3; \quad D_C = 3$$

$$A = \frac{D_A}{D} = \frac{-2}{1} = -2; \quad B = \frac{D_B}{D} = \frac{1}{1} = 1; \quad C = \frac{D_C}{D} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$A = -2, B = 1, C = 3$$

Сада се враћамо на формулу (1):

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{-2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+2}$$

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} dx = \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+2} \right) dx =$$

$$= \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int \frac{3}{x+2} dx = -2 \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + 3 \int \frac{1}{x+2} dx;$$

$$* \int \frac{1}{x+1} dx \quad \text{смена: } t = x+1, dt = (x+1)' dx, dt = dx$$

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| = \ln |x+1|$$

$$* \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \quad \text{смена: } t = x+1, dt = (x+1)' dx, dt = dx$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x+1}$$

$$* \int \frac{1}{x+2} dx \quad \text{смена: } t = x+2, dt = (x+2)' dx, dt = dx$$

$$\int \frac{1}{x+2} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| = \ln |x+2|$$

Коначно:

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} dx = -2 \ln |x+1| - \frac{1}{x+1} + 3 \ln |x+2| + C$$



4. $y = x^2 \rightarrow$ параболола $\cup$

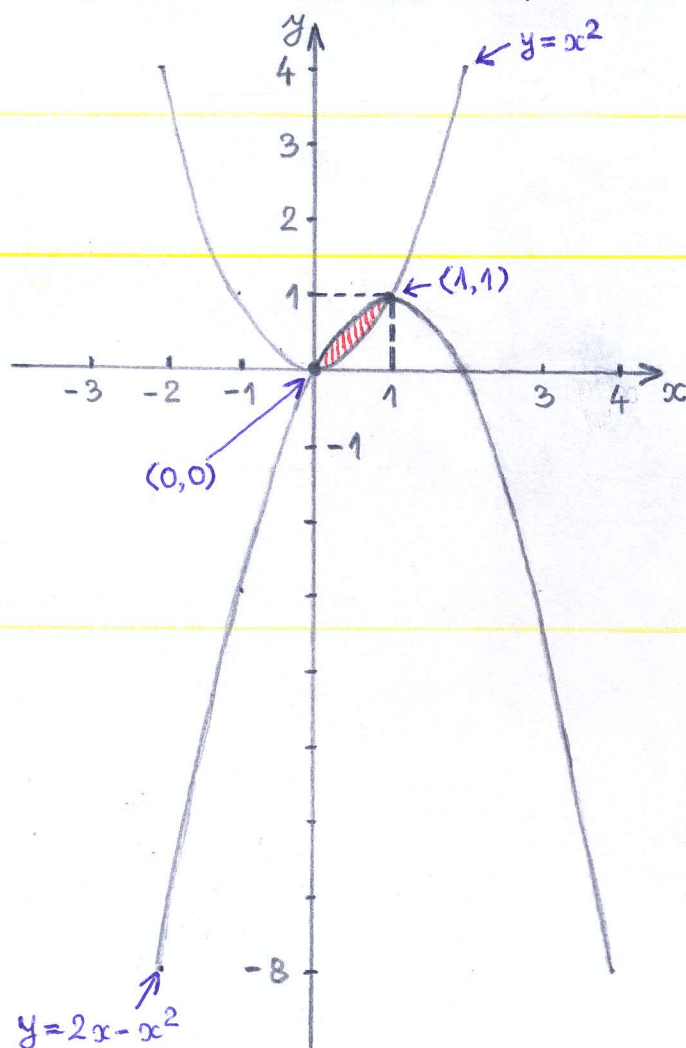
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

$y = 2x - x^2 \rightarrow$ параболола $\cap$

Нуле функције: $2x - x^2 = 0$, $x(2 - x) = 0$,
 $x = 0$ или $2 - x = 0$; $x = 0$, $x = 2$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2x - x^2$	-8	-3	0	1	0	-3	-8

Пресек параболола: $x^2 = 2x - x^2$, $2x^2 - 2x = 0$, $2x(x - 1) = 0$,
 $x(x - 1) = 0 \rightarrow x = 0$, $x = 1$;
Тачке пресека су $(0, 0)$ и $(1, 1)$.



Шрафирана површина:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^1 (2x - x^2 - x^2) dx = \\
 &= \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \\
 &= 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = \\
 &= 2 \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \right] = \\
 &= 2 \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Шрафирана површина износи $\frac{1}{3}$.