

МАТЕМАТИКА

Писани део испита - Јунски рок - 17. 6. 2022.

ЗАДАЦИ

1. Испитати ток и конструисати график функције: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$.

2. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ x + y + 3z = 8 \end{cases}$$

3. Израчунати интеграл: $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx$.

4. Одредити површину области која је ограничена линијама $y = 6x - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.
Скицирати слику и ишрафирати посматрану област.

Напомена. Израда задатака траје 3 сата. Дозвољена је употреба калкулатора; није дозвољена употреба мобилних телефона. На писаном делу испита могуће је освојити највише 70 поена: први задатак - 18 поена, други задатак - 17 поена, трећи задатак - 18 поена, четврти задатак - 17 поена.

Математика
Писани до испита - Јуни рок - 17.06.2022.

Зад 1) Испитати ток и конструисати график функције:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

1° Област дефинисаности

$$x^2 + 3 \neq 0 \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad D_f = (-\infty, +\infty)$$

2° Нуле ф-је (пресек са x-осом)

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (0, 0)$$

3° Пресек са y-осом

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2}{0^2 + 3} = 0 \quad (0, 0)$$

4° Знак ф-је

$$x^2 \quad \begin{array}{ccccccc} + & + & + & + & | & + & + & + & + \end{array} \rightarrow x$$

$$x^2 + 3 \quad \begin{array}{ccccccc} + & + & + & + & | & + & + & + & + \end{array} \rightarrow x$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3} \quad \begin{array}{ccccccc} + & + & + & + & | & + & + & + & + \end{array} \rightarrow x$$

f је позитивна на интервалу $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

5° Парност

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 3} = \frac{x^2}{x^2 + 3} = f(x)$$

ф-ца е парна,

график е симетричен φ относно на y ос.

6° Асимптоти

2

- Вертикалните асимптоти не посъжда.

- Хоризонталните асимптоти

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} = 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} = 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

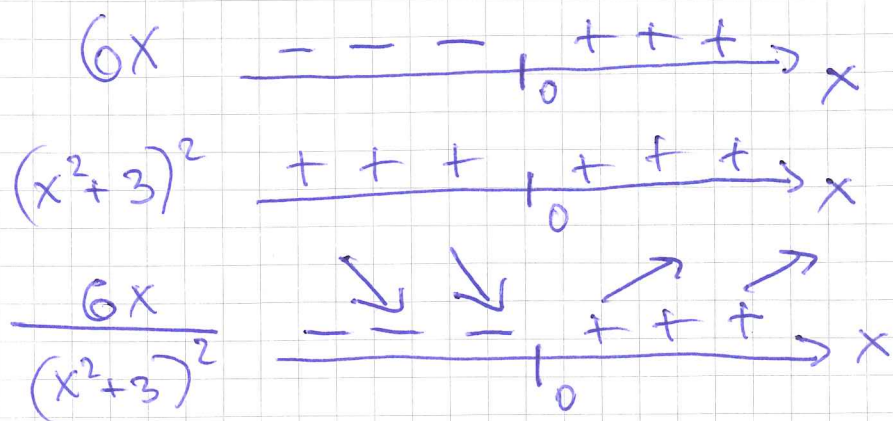
- Косе асимптоти не посъжда.

7° Монотоност и екстремне стойности

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 + 3} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x^2 + 3) - x^2 \cdot (x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot (x^2 + 3) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x^3 + 6x - 2x^3}{(x^2 + 3)^2} =$$

$$= \frac{6x}{(x^2 + 3)^2}$$



$F(x)$ je ovađazhna na intervalu $(-\infty, 0)$

$f(x)$ не расщепляется на интервалу $(0, +\infty)$

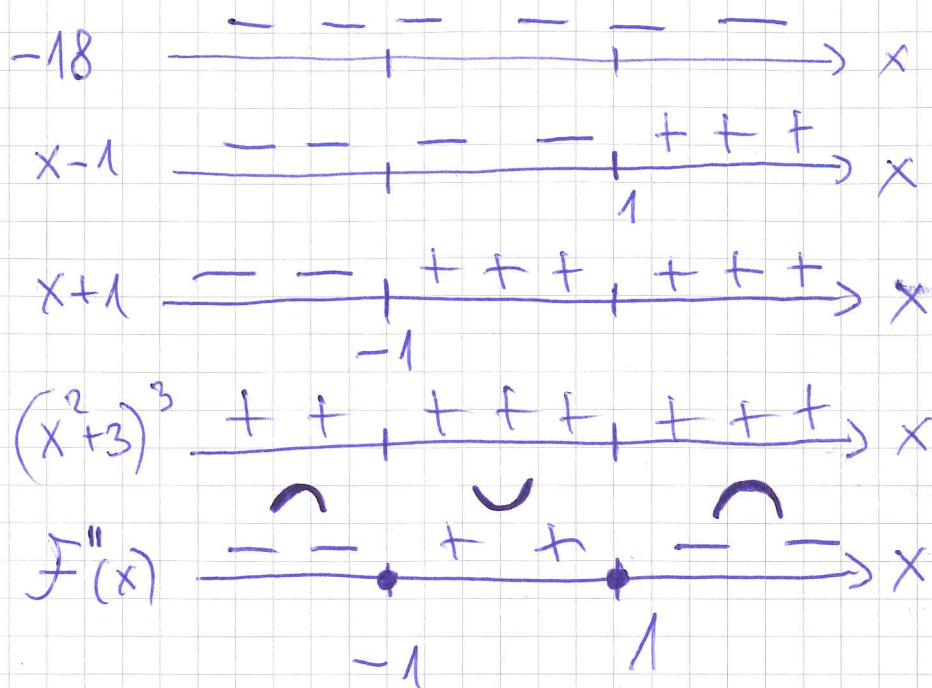
$f'(0) = 0$ $(0,0)$ je pokazni minimum

$$f(0) = 0$$

8° Конвексности, конкавности и предельные точки.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{6x}{(x^2+3)^2} \right)' = \frac{(6x)' \cdot (x^2+3)^2 - 6x \cdot ((x^2+3)^2)'}{(x^2+3)^4} \\ &= \frac{6 \cdot (x^2+3)^2 - 6x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \\ &= \frac{\cancel{6(x^2+3)} (x^2+3 - 4x^2)}{(x^2+3)^{4-3}} = \frac{6(-3x^2+3)}{(x^2+3)^3} = \\ &= \frac{+18(-x^2+1)}{(x^2+3)^3} = \frac{-18(x^2-1)}{(x^2+3)^3} \end{aligned}$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad x_{1,2} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



f je konveksna na intervalu $(-1, 1)$

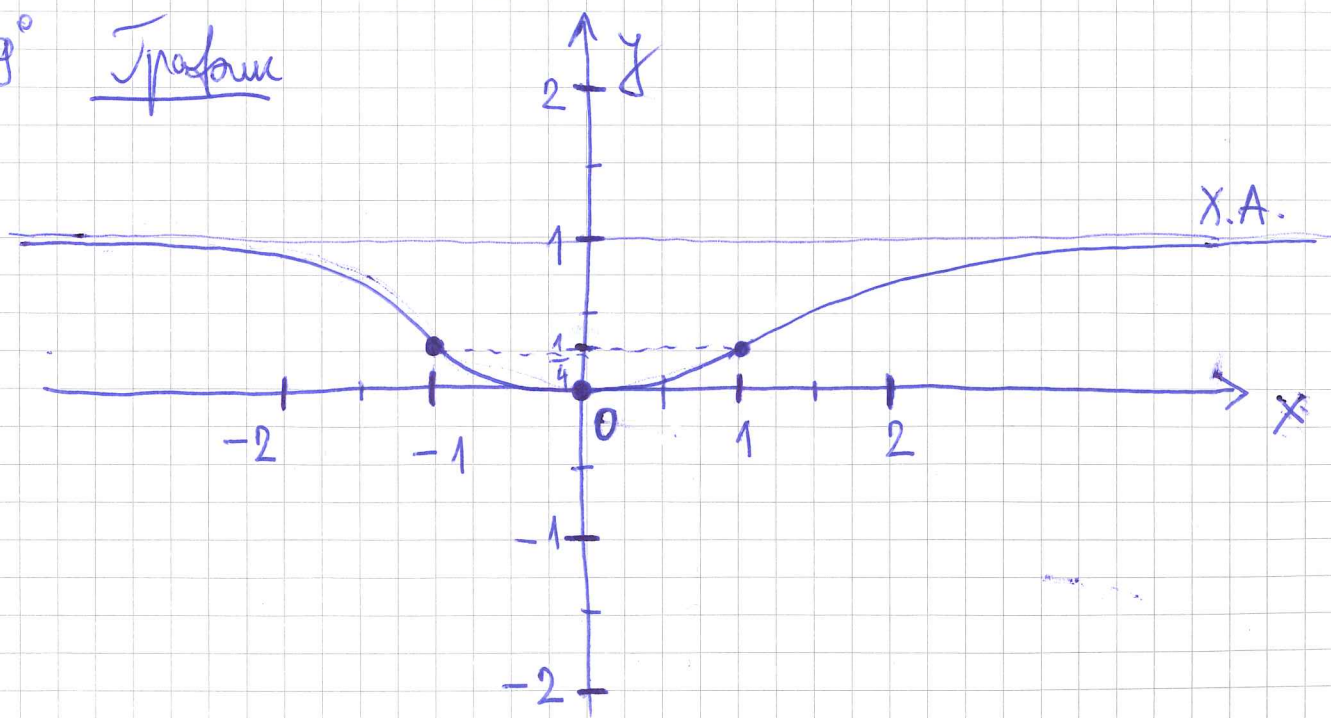
7. f не монотонна на интервалами $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Ф-га 7 има 2 првоугле тачке:

$$f(-1) = \frac{(-1)^2}{(-1)^2 + 3} = \frac{1}{4} \quad \left(-1, \frac{1}{4}\right)$$

$$F(1) = \frac{1^2}{1^2 + 3} = \frac{1}{4} \quad \left(1, \frac{1}{4}\right)$$

g^o Transform



Вар 2 Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ x + y + 3z = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(-1)B_1 + B_3 \rightarrow B_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)B_2 + B_3 \rightarrow B_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{B_3 \cdot (-\frac{1}{4}) \rightarrow B_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x - 2y + z = 1$$

$$y + 2z = 5$$

$$z = 2$$

$$\Rightarrow x = 1 + 2 \cdot 1 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow y = 5 - 2z = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$$

$$(x, y, z) = (1, 1, 2)$$

решение системы
уравнений

Задача 3) Упростите интеграл:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx &= \int \frac{(x+1)(x+1)^2}{x^2-x} dx = \\&= \int \frac{(x+1)(x^2+2x+1)}{x(x-1)} dx = \int \frac{(x^3+2x^2+x+x^2+2x+1)}{x^2-x} dx = \\&= \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x} dx\end{aligned}$$

6

$$\begin{array}{r} (x^3+3x^2+3x+1) : (x^2-x) = x+4 \\ - (x^3-x^2) \\ \hline 4x^2+3x+1 \\ - (4x^2-4x) \\ \hline 7x+1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx &= \int (x+4) dx + \int \frac{7x+1}{x^2-x} dx = \\&= \int x dx + 4 \int dx + \int \frac{7x+1}{x(x-1)} dx = \\&= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{7x+1}{x(x-1)} dx\end{aligned}$$

$$\frac{7x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A \cdot (x-1) + B \cdot x}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{A \cdot x - A + B \cdot x}{x(x-1)} = \frac{x \cdot (A+B) - A}{x(x-1)}$$

$$\begin{array}{rcl} A+B & = & 7 \\ -A & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow + \\ \searrow - \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow B = 8 \\ \Rightarrow A = -1 \end{array}$$

7

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{8}{x-1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x - \ln|x| + 8 \ln|x-1| + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \frac{(x-1)^8}{|x|} + C$$

решение

Зад 4) Определить площадь области коба x
 ограничена линиями: $y = 6x - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.
 Сконструировать линию и нарисовать область.

$$y = 6x - x^2 = x(6 - x)$$

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	...	-16	-7	0	5	8	9	8	5

$$y = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	15	8	3	0	-1	0	3	8

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \quad 8$$

$$-x^2 - x^2 + 6x + 2x = 0$$

$$-2x^2 + 8x = 0$$

$$2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x - 4) = 0$$

$$\begin{matrix} x_1 = 0 & y_1 = 0 & (0, 0) \\ x_2 = 4 & y_2 = 8 & (4, 8) \end{matrix} \left. \begin{matrix} \text{Парке} \\ \text{пересек} \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} P &= \int_0^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x) dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x) dx = \\ &= -2 \int_0^4 x^2 dx + 8 \int_0^4 x dx = -2 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^4 + 8 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^4 = -\frac{2}{3} (4^3 - 0^3) + \\ &+ 4 \cdot (4^2 - 0^2) = -\frac{128}{3} + \frac{192}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3} \end{aligned}$$

