

МАТЕМАТИКА

Писани део испита - Септембарски рок - 26. 8. 2022.

ЗАДАЦИ

1. Испитати ток и конструисати график функције: $f(x) = x^3 - 3x^2$.

2. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x \quad \quad + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$$

3. Израчунати интеграл: $\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}$.

4. Одредити површину области која је ограничена линијама $y = 2x - x^2$ и $y = -x$.
Скицирати слику и ишрафирати посматрану област.

Напомена. Израда задатака траје 3 сата. Дозвољена је употреба калкулатора; није дозвољена употреба мобилних телефона. На писаном делу испита могуће је освојити највише 70 поена: први задатак - 18 поена, други задатак - 17 поена, трећи задатак - 18 поена, четврти задатак - 17 поена.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2$

1° Област дефинисаности

Функција f је полином.

$D(f) = (-\infty, +\infty)$

2° Нуле функције

$f(x) = x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2(x-3) = 0$

$x=0$ или $x-3=0$

$x=0$ или $x=3$

$(0,0); (3,0)$.

3° Пресек са y -осом

$x=0 \rightarrow f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$

$(0,0)$.

4° Знак функције

$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$

x^2 : $+++|++++|++++|++++|$

$x-3$: $---|---|---|+++|$

f : $---|---|---|+++|$

f је негативна на инт. $(-\infty, 0)$ и $(0, 3)$

f је позитивна на инт. $(3, +\infty)$.

5° Парност

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 = -x^3 - 3x^2$

Функција није ни парна ни непарна.

6° Асимптоте

$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot (1 - \frac{3}{x}) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot (1 - \frac{3}{x}) = -\infty$

7° Монотоност и екс. вредности

$f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = (x^3)' - (3x^2)'$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot (x^2)' = 3x^2 - 3 \cdot 2x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$3x$: $---|---|+++|+++|+++|+++|$

$x-2$: $---|---|---|+++|+++|$

$f'(x)$: $+++|+++|---|---|---|+++|+++|$

f опада на инт. $(0, 2)$.

f расте на инт. $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$.

Критичне тачке: $x=0$ и $x=2$.

$x=0 \leftarrow$ локални максимум
 $f(0) = 0; (0, 0)$.

$x=2 \leftarrow$ локални минимум

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4; (2, -4)$.

8° Конвексност, конкавност и
превојне тачке

$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$

$f''(x) = 6 \cdot (x-1)$

$x-1$: $---|---|---|+++|+++|+++|$

$f''(x)$: $---|---|---|+++|+++|+++|$

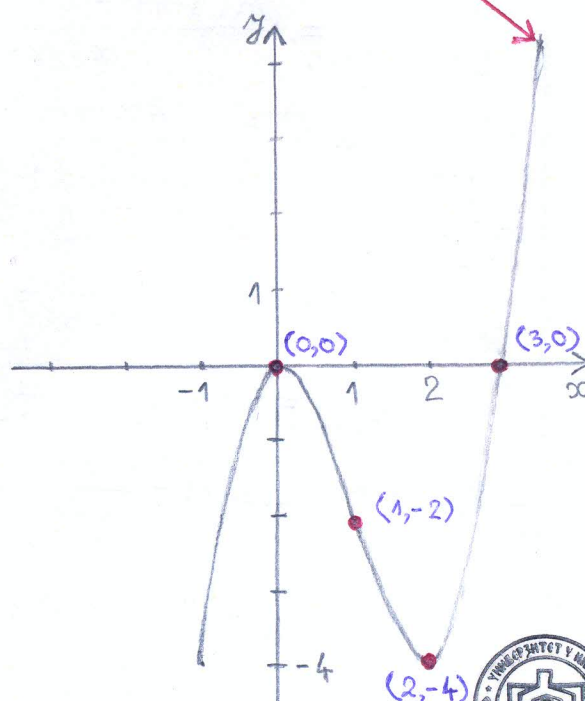
f је конкавна на инт. $(-\infty, 1)$

f је конвексна на инт. $(1, +\infty)$

Превојна тачка: $f(1) = -2, (1, -2)$.

9° Цртање графика

$f(x) = x^3 - 3x^2$



$$2. \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-1)B_1 + B_2 \rightarrow B_2 \\ (-2)B_1 + B_3 \rightarrow B_3 \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}B_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5B_2 + B_3 \rightarrow B_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}B_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ y - z = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y = 0; \quad x + 2 \cdot 0 - 1 &= -2 \\ x - 1 &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Систем има једино решење: $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$.

3. $\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}$; Подинтегрална функција је $f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}$.

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} = \frac{A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - x) + Cx}{x(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=0 \end{cases} \quad \begin{aligned} B &= -1 \\ -2 \cdot 1 - (-1) + C &= 0, \quad -2 + 1 + C = 0, \quad C = 1 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

Интеграл $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$: замена $x-1 = t$, $dx = dt$

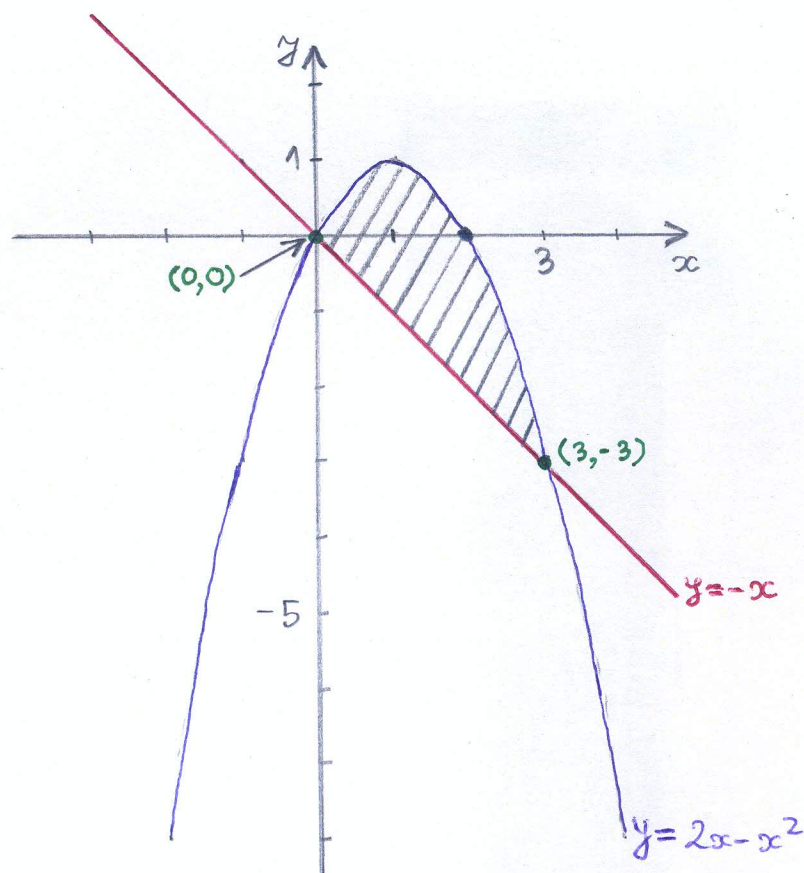


$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x-1};$$

4. $y = 2x - x^2 \rightarrow$ параболола $\frown$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2x - x^2$	-8	-3	0	1	0	-3	-8

$y = -x \leftarrow$ права
симетрала II и IV
квadrанта



Пресек параболола и праве: $2x - x^2 = -x$, $x^2 - 3x = 0$, $x(x-3) = 0$, $x = 0$, $x = 3$. Тачке пресека су $(0,0)$ и $(3,-3)$.

$$\text{Црафирована површина} = \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)] dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = -\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} = -9 + \frac{27}{2} = -\frac{18}{2} + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$