

МАТЕМАТИКА - писани део испита

Јануарско-фебруарски рок - Прва група - 11. 2. 2022.

ЗАДАЦИ

1. Испитати ток и конструисати график функције: $f(x) = x^4 - 4x$.

2. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x + y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{cases}$$

3. Израчунати интеграл: $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} dx$.

4. Одредити површину области која је ограничена линијама $y = x^2 + 1$ и $y = 7 - x$.
Скицирати слику и ишрафирати посматрану област.

Напомена. Израда задатака траје 3 сата. Дозвољена је употреба калкулатора; није дозвољена употреба мобилних телефона. На писаном делу испита могуће је освојити највише 70 поена: први задатак - 18 поена, други задатак - 17 поена, трећи задатак - 18 поена, четврти задатак - 17 поена.

МАТЕМАТИКА - писани део испита

Јануарско-фебруарски рок - Друга група - 11. 2. 2022.

ЗАДАЦИ

1. Испитати ток и конструисати график функције: $f(x) = x^4 - 2x^2$.

2. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 32 \\ 2x + y + 3z = 31 \\ 3x + 2y + z = 28 \end{cases}$$

3. Израчунати интеграл: $\int \frac{4x}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$.

4. Одредити површину области која је ограничена линијама $y = x^3$, $y = 8$ и $x = 0$.
Скицирати слику и ишрафирати посматрану област.

Напомена. Израда задатака траје 3 сата. Дозвољена је употреба калкулатора; није дозвољена употреба мобилних телефона. На писаном делу испита могуће је освојити највише 70 поена: први задатак - 18 поена, други задатак - 17 поена, трећи задатак - 18 поена, четврти задатак - 17 поена.

МАТЕМАТИКА - КЉУЧ

Јануарско - фебруарски рок, 11. 2. 2022. године

1 група

1. $f(x) = x^4 - 4x$

1° Област дефинисаности

Функција f је полином.

$D(f) = (-\infty, +\infty)$

2° Нуле функције

$f(x) = x^4 - 4x = 0$

$x(x^3 - 4) = 0$

$x = 0$ или $x^3 - 4 = 0$

$x = 0$ или $x^3 = 4$

$x = 0$ или $x = \sqrt[3]{4} \approx 1,6$

$(0, 0); (\sqrt[3]{4}, 0)$.

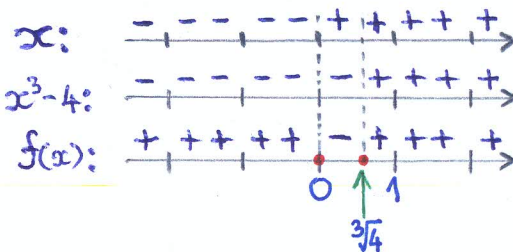
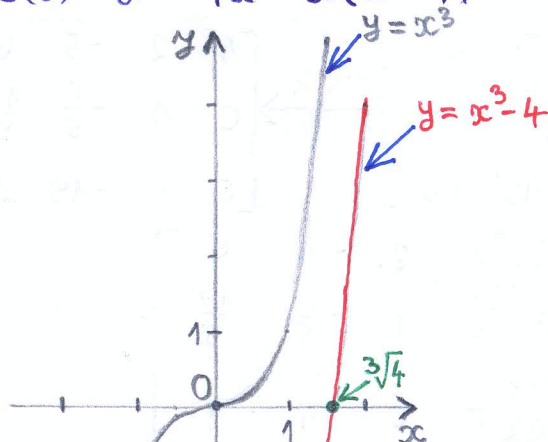
3° Пресек са y -осом

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0 = 0$

$(0, 0)$.

4° Знак функције

$f(x) = x^4 - 4x = x(x^3 - 4)$



f је позитивна на инт. $(-\infty, 0)$ и $(\sqrt[3]{4}, +\infty)$

f је негативна на инт. $(0, \sqrt[3]{4})$

5° Парност

$f(-x) = (-x)^4 - 4 \cdot (-x) = x^4 + 4x$

f није ни парна ни непарна.

6° Асимптоте

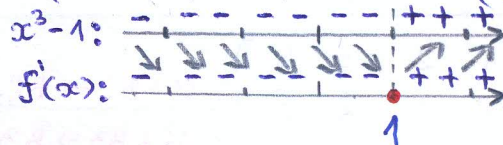
Вертикалне асимптоте не постоје.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 (1 - \frac{4}{x^3}) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 4x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 (1 - \frac{4}{x^3}) = +\infty$

7° Монотоност и екстремне вредности

$f'(x) = (x^4 - 4x)' = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$



f опада на инт. $(-\infty, 1)$.

f расте на инт. $(1, +\infty)$.

$f'(1) = 0 \rightarrow x = 1$ је критична тачка;

$x = 1 \leftarrow$ локални минимум

$f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 = -3; (1, -3)$.

8° Конвексност, конкавност и
превојне тачке

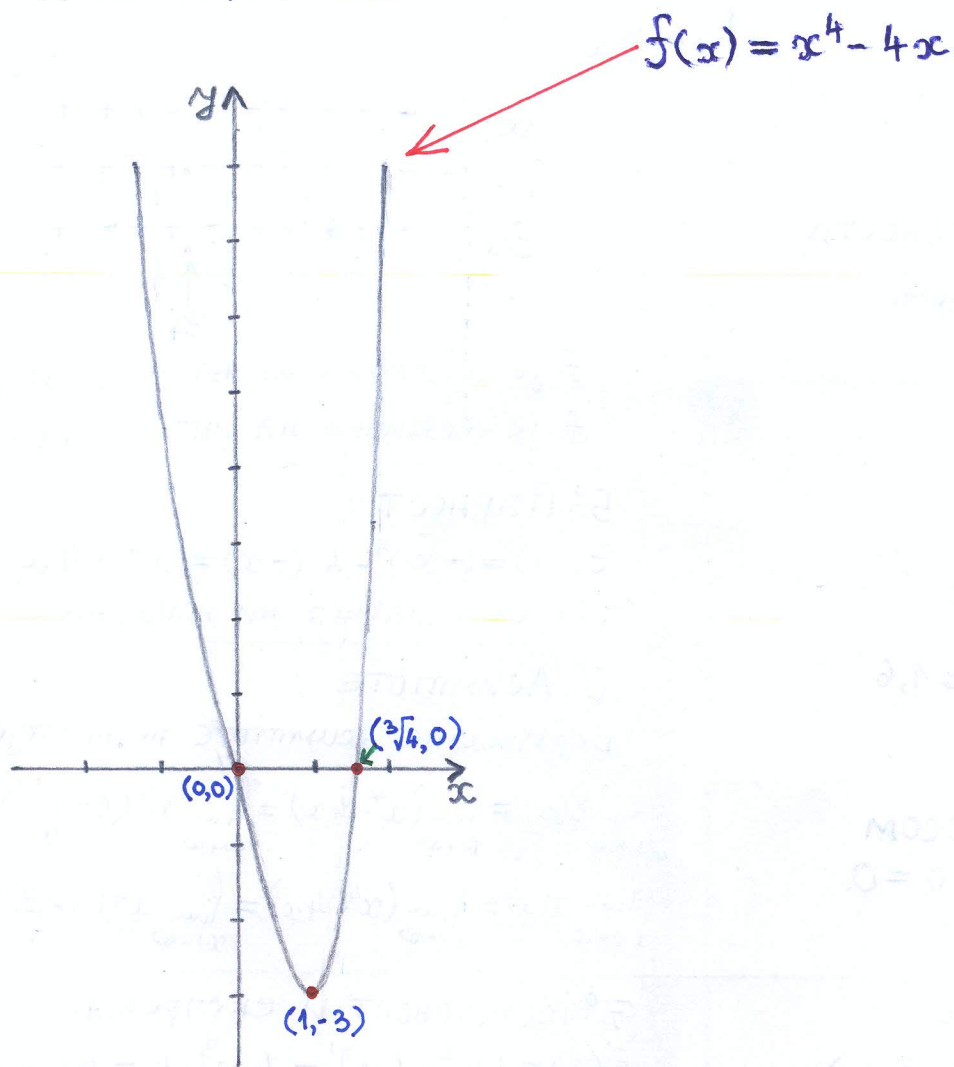
$f''(x) = [4(x^3 - 1)]' = 4 \cdot (x^3 - 1)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2 \geq 0$

f је конвексна на инт. $(-\infty, +\infty)$.

Превојних тачака нема.



9° Цртање графика



$$\begin{aligned}
 &2. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2 \cdot B_1 + B_2 \rightarrow B_2 \\ 3 \cdot B_1 + B_3 \rightarrow B_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 5 & -8 & 17 \\ 0 & 9 & -19 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5} B_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 9 & -19 & 26 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{(-9)B_2 + B_3 \rightarrow B_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{5} & -\frac{23}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{5}{23} B_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ y - \frac{8}{5}z = \frac{17}{5} \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y - \frac{8}{5} \cdot 1 = \frac{17}{5} \\ y - \frac{8}{5} = \frac{17}{5} \\ y = \frac{17}{5} + \frac{8}{5} = \frac{25}{5} \\ y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 6 \\ x + 10 - 5 = 6 \\ x + 5 = 6 \\ x = 1 \end{cases} \\
 &\quad \quad \quad z = 1 \\
 &\quad \quad \quad y = 5
 \end{aligned}$$



Систем има једино решење: $(x, y, z) = (1, 5, 1)$.

$$3. \int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} dx;$$

$$\frac{10}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{A \cdot \frac{1}{x-1}}{x-1} + \frac{Mx+N \cdot \frac{1}{x^2+9}}{x^2+9} = \frac{A \cdot (x^2+9) + (Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+9)};$$

$$\frac{10}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{Ax^2 + 9A + Mx^2 - Mx + Nx - N}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{(A+M)x^2 + (N-M)x + (9A-N)}{(x-1)(x^2+9)}$$

$$\left. \begin{array}{l} A+M=0 \\ N-M=0 \\ 9A-N=10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} N-M=0 \rightarrow M=N, \text{ па једначина } 9A-N=10 \text{ постаје } 9A-M=10. \\ \text{Из } \left. \begin{array}{l} A+M=0 \\ 9A-M=10 \end{array} \right\} \text{ добијемо } 10A=10, \text{ односно } A=1. \text{ Уз} \end{array}$$

$A+M=0$ сада следи да је $M=-1$, па је и $N=-1$.

$$\text{Добијемо: } \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x-1}{x^2+9}, \text{ односно}$$

$$\frac{10}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+9};$$

$$\begin{aligned} \int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} dx &= \int \left[\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+9} \right] dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{x^2+9} dx = \\ &= \ln|x-1| - \underbrace{\int \frac{x}{x^2+9} dx}_{J_1} - \underbrace{\int \frac{1}{x^2+9} dx}_{J_2}; \end{aligned}$$

$$J_1 = \int \frac{x}{x^2+9} dx \rightarrow \text{мена } x^2+9=t, \quad dt=2x dx, \quad x dx = \frac{1}{2} dt;$$

$$J_1 = \int \frac{x}{x^2+9} dx = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t = \frac{1}{2} \ln(x^2+9);$$

$$J_2 = \int \frac{1}{x^2+9} dx \quad \text{Знамо: } \int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

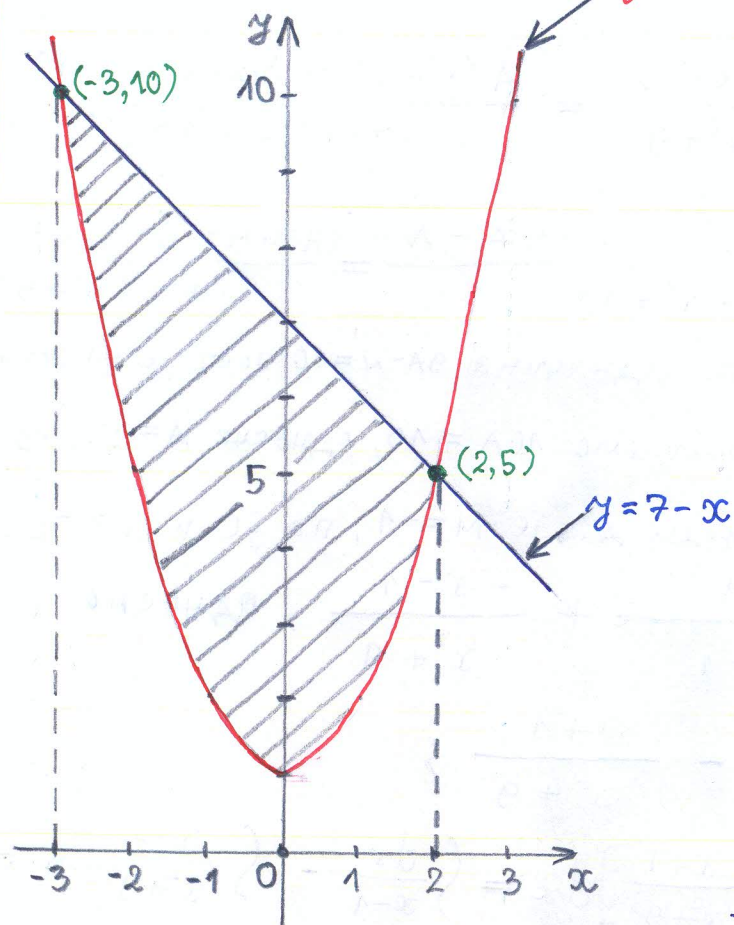
$$J_2 = \int \frac{1}{x^2+9} dx = \int \frac{1}{x^2+3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3};$$

$$\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+9) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.$$



I група

4.



$y = x^2 + 1$ - параболa $\cup$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 + 1$	10	5	2	1	2	5

$y = 7 - x$ - права $\searrow$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$y = 7 - x$	10	9	8	7	6	5

Пресек параболe и праве:

$$x^2 + 1 = 7 - x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 - 5}{2}; \quad x_1 = -3;$$

$$x_2 = \frac{-1 + 5}{2}; \quad x_2 = 2;$$

Таке пресека су: $(-3, 10)$ и $(2, 5)$.

$$\begin{aligned} \text{Графирана површина} &= \int_{-3}^2 [(7-x) - (x^2+1)] dx = \int_{-3}^2 (7-x-x^2-1) dx \\ &= \int_{-3}^2 (6-x-x^2) dx = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^2 = \left(6 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} \right) - \\ &\quad \left(6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3} \right) = \left(12 - 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + 9 \right) = \\ &= \left(10 - \frac{8}{3} \right) - \left(-9 - \frac{9}{2} \right) = 10 - \frac{8}{3} + 9 + \frac{9}{2} = 19 - \frac{16}{6} + \frac{27}{6} = 19 + \frac{11}{6} = \\ &= 19 + 1 + \frac{5}{6} = 20 + \frac{5}{6} = 20\frac{5}{6}. \end{aligned}$$



МАТЕМАТИКА - КЉУЧ

Јануарско - фебруарски рок, 11.2.2022. године

II група

1. $f(x) = x^4 - 2x^2$

1° Област дефинисаности

Функција f је полином.

$D(f) = (-\infty, +\infty)$

2° Нуле функције

$f(x) = x^4 - 2x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 2) = 0$

$x = 0$ или $x^2 - 2 = 0$

$x = 0$ или $x = -\sqrt{2}$ или $x = \sqrt{2}$

$(0, 0); (-\sqrt{2}, 0); (\sqrt{2}, 0).$

3° Пресек са y -осом

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0$

$(0, 0).$

4° Знак функције

$f(x) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$

График функ. $y = x^2 - 2$ је парабола облика $\cup$; нуле ове функ. су $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$.

x^2 : $+++++|+++++|+++++|+++++$

$x^2 - 2$: $++++|-----|-----|+++++$

$f(x)$: $++++|-----|-----|+++++$
 $-\sqrt{2} \quad 0 \quad \sqrt{2}$

f је позитивна на инт. $(-\infty, -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, +\infty)$

f је негативна на инт. $(-\sqrt{2}, 0)$ и $(0, \sqrt{2})$.

5° Парност

$f(-x) = (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$

Функција f је парна

6° Асимптоте

Вертикалне асимптоте не постоје.

$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$

7° Монотоност и екстремне вредности

$f'(x) = (x^4 - 2x^2)' = (x^4)' - (2x^2)'$

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

x : $---|---|+++|+++$

$x^2 - 1$: $+++|---|---|+++$

$f'(x)$: $---|+++|---|+++$
 $-1 \quad 0 \quad 1$

f опада на инт. $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$.

f расте на инт. $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$.

Критичне тачке: $x = -1, x = 0, x = 1$.

$x = -1 \leftarrow$ локални минимум; $f(-1) = -1$;
 $(-1, -1)$;

$x = 0 \leftarrow$ локални максимум; $f(0) = 0$;
 $(0, 0)$;

$x = 1 \leftarrow$ локални минимум; $f(1) = -1$;
 $(1, -1).$

8° Конвексност, конкавност и превојне тачке

$f''(x) = (4x^3 - 4x)' = 4(x^3 - 1) = 4 \cdot (3x^2 - 1)$

$f''(x) = 12 \cdot (x^2 - \frac{1}{3})$; График функ. $y = x^2 - \frac{1}{3}$ је парабола облика $\cup$; нуле ове функ. су $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$x^2 - \frac{1}{3}$: $+++|-----|+++++$

$f''(x)$: $+++|-----|+++++$
 $-\sqrt{3}/3 \quad \sqrt{3}/3$

f је конвексна на инт. $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ и $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

f је конкавна на инт. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

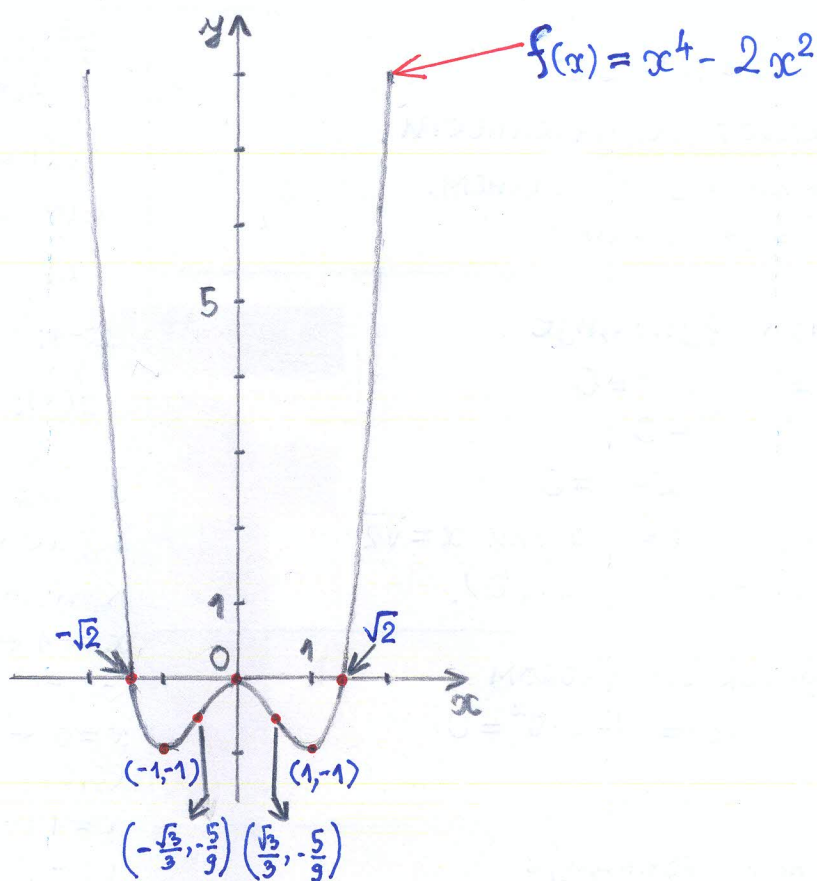
$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{5}{9}$

Превојне тачке:

$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9})$ и $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}).$



9° Цртање графика



$$2. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 32 \\ 2 & 1 & 3 & 31 \\ 3 & 2 & 1 & 28 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2)B_1 + B_2 \rightarrow B_2 \\ (-3)B_1 + B_3 \rightarrow B_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 32 \\ 0 & -3 & -3 & -33 \\ 0 & -4 & -8 & -68 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{3}B_2 \\ -\frac{1}{4}B_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 32 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)B_2 + B_3 \rightarrow B_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 32 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 32 \\ y + z = 11 \\ z = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{aligned} y + 6 &= 11 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 &= 32 \\ x + 10 + 18 &= 32 \\ x + 28 &= 32 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Систем има једино решење: $(x, y, z) = (4, 5, 6)$.



3. $\int \frac{4x}{x^3+x^2+x+1} dx$;

$$\frac{4x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{4x}{x^2(x+1)+(x+1)} = \frac{4x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

$$\frac{4x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{4x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1) + (Mx+N)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{Ax^2 + A + Mx^2 + Mx + Nx + N}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{4x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{4x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(A+M)x^2 + (M+N)x + (A+N)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} A+M=0 \\ M+N=4 \\ A+N=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A+M=0 \rightarrow M=-A \\ A+N=0 \rightarrow N=-A \end{array} \rightarrow \text{поставим } M+N=4 \text{ по ставке}$$

$$-A-A=4, -2A=4, A=-2;$$

$$M=N=2;$$

Проверяем: $\frac{4x}{x^3+x^2+x+1} = -\frac{2}{x+1} + \frac{2x+2}{x^2+1}$;

$$\int \frac{4x}{x^3+x^2+x+1} dx = \int \left[-\frac{2}{x+1} + \frac{2x+2}{x^2+1} \right] dx = -2 \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2x+2}{x^2+1} dx =$$

$$= -2 \ln|x+1| + \underbrace{\int \frac{2x}{x^2+1} dx}_{J} + 2 \int \frac{dx}{x^2+1};$$

$J = \int \frac{2x}{x^2+1} dx \rightarrow \text{смена } x^2+1=t, dt=2x dx;$

$$J = \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(x^2+1);$$

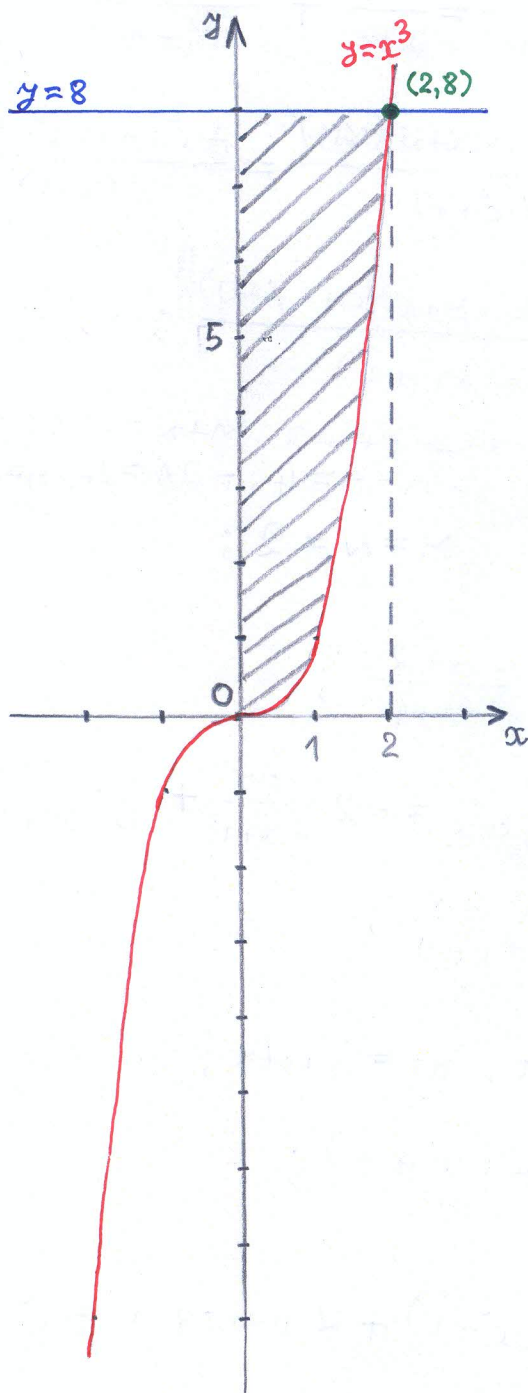
$$\int \frac{4x}{x^3+x^2+x+1} dx = -2 \ln|x+1| + \ln(x^2+1) + 2 \operatorname{arctg} x + C.$$



4.

Пресек криве $y=x^3$ и праве $y=8$:
 $x^3=8 \rightarrow x=2$;

Пресек се дешава у тачки $(2,8)$.



$$\begin{aligned} \text{Шрафпрана површина} &= \\ &= \int_0^2 (8 - x^3) dx = \left(8x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \left(8 \cdot 2 - \frac{2^4}{4} \right) - \left(8 \cdot 0 - \frac{0^4}{4} \right) = 12. \end{aligned}$$