МАТЕМАТИКА - писани део испита

Априлски рок - Прва група - 20. 4. 2022.

ЗАДАЦИ

1. Испитати ток и конструисати график функције: $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$.

2. Решити хомоген систем једначина:

$$\begin{cases} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \end{cases}$$

3. Израчунати интеграл: $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-4}\,dx$.

4. Одредити површину области која је ограничена кривом $y = x^3$, x-осом и правама $x = -2$ и $x = 2$. Скицирати слику и ишрафирати посматрану област.

Напомена. Израда задатака траје 3 сата. Дозвољена је употреба калкулатора; није дозвољена употреба мобилних телефона. На писаном делу испита могуће је освојити највише 70 поена: први задатак - 18 поена, други задатак - 17 поена, трећи задатак - 18 поена, четврти задатак - 17 поена.

МАТЕМАТИКА - писани део испита

Априлски рок - Друга група - 20. 4. 2022.

ЗАДАЦИ

1. Испитати ток и конструисати график функције: $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-4}$.

2. Решити хомоген систем једначина:

$$\begin{cases} 4x & - & 3y & - & 2z & = & 0 \\ 5x & + & 9y & + & 23z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 7z & = & 0 \end{cases}$$

3. Израчунати интеграл: $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^3+x}\,dx$.

4. Одредити површину области која је ограничена линијама $y = x^2$ и $y = x$.
Скицирати слику и ишрафирати посматрану област.

Напомена. Израда задатака траје 3 сата. Дозвољена је употреба калкулатора; није дозвољена употреба мобилних телефона. На писаном делу испита могуће је освојити највише 70 поена: први задатак - 18 поена, други задатак - 17 поена, трећи задатак - 18 поена, четврти задатак - 17 поена.

МАТЕМАТИКА - КЉУЧ

Априлски рок, 20.4.2022. године

I група

1. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$

1° Област дефинисаности

Израз x^2+4 је различит од 0 за сваки реалан број x.

$\mathcal{D}(f)=(-\infty,+\infty)$ (1)

2° Нуле функције

$f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}=0$; $4x=0$; $x=0$;

$(0,0)$. (1)

3° Пресек са y-осом

$x=0\rightarrow f(0)=\dfrac{4\cdot 0}{0^2+4}=0$;

$(0,0)$. (1)

4° Знак функције (2)

$4x$: $- - - - - - \mid + + + + + +$

x^2+4: $+ + + + + + \mid + + + + + +$

$f(x)$: $- - - - - - \underset{0}{\bullet} + + + + + +$

f је негативна на инт. $(-\infty,0)$

f је позитивна на инт. $(0,+\infty)$

5° Парност (2)

$f(-x)=\dfrac{4\cdot(-x)}{(-x)^2+4}=-\dfrac{4x}{x^2+4}=-f(x)$

Функција је непарна - график је симетричан у односу на координатни почетак.

6° Асимптоте (2)

Вертикалне асимптоте не постоје.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{x^2(1+\frac{4}{x^2})}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{x}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{4}{x^2}}\right)=0\cdot 1=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{x}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{4}{x^2}}\right)=0\cdot 1=0$

Права $y=0$ (x-оса) је хоризонтална асимптота и кад $x\to\infty$ и кад $x\to-\infty$.

7° Монотоност и екстремне вредности (3)

$f'(x)=\left(\dfrac{4x}{x^2+4}\right)'=\dfrac{(4x)'(x^2+4)-4x\cdot(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}=$

$=\dfrac{4(x^2+4)-4x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=\dfrac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$; Знак првог извода је исти као и знак члана $4-x^2$.

$4-x^2$: $- - - \mid + + + + + + + + + + \mid - - -$

$f'(x)$: $- - - \underset{-2}{\bullet} + + + + + + + + + + \underset{2}{\bullet} - - -$

f опада на интервалима $(-\infty,-2)$ и $(2,\infty)$.

f расте на интервалу $(-2,2)$.

$f'(-2)=0$, $f'(2)=0$; -2 и 2 - критичне тачке

$x=-2\leftarrow$ локални минимум

$f(-2)=\dfrac{4\cdot(-2)}{(-2)^2+4}=-1$; $(-2,-1)$.

$x=2\leftarrow$ локални максимум

$f(2)=\dfrac{4\cdot 2}{2^2+4}=1$; $(2,1)$.

8° Конвексност, конкавност и превојне тачке (3)

$f''(x)=\left[\dfrac{4\cdot(4-x^2)}{(x^2+4)^2}\right]'=4\cdot\left[\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}\right]'=$

$=4\cdot\dfrac{(4-x^2)'(x^2+4)^2-(4-x^2)\left[(x^2+4)^2\right]'}{(x^2+4)^4}$

$=4\cdot\dfrac{-2x(x^2+4)^2-(4-x^2)\cdot 2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4}$

$=4\cdot\dfrac{(x^2+4)\left[-2x(x^2+4)-4x(4-x^2)\right]}{(x^2+4)^4}$

$=4\cdot\dfrac{-2x^3-8x-16x+4x^3}{(x^2+4)^3}=$

$=4\cdot\dfrac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}=$

$$= 4 \cdot \frac{2x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}\ ; \quad f''(x) = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} = \frac{8x(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x^2+4)^3}$$

	$(-\infty,-2\sqrt{3})$	$(-2\sqrt{3},0)$	$(0,2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3},\infty)$
$8x$:	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2\sqrt{3}$:	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2\sqrt{3}$:	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x^2+4)^3$:	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$:	$-$ $\frown$	$+$ $\smile$	$-$ $\frown$	$+$ $\smile$

$-2\sqrt{3}$ 0 $2\sqrt{3}$

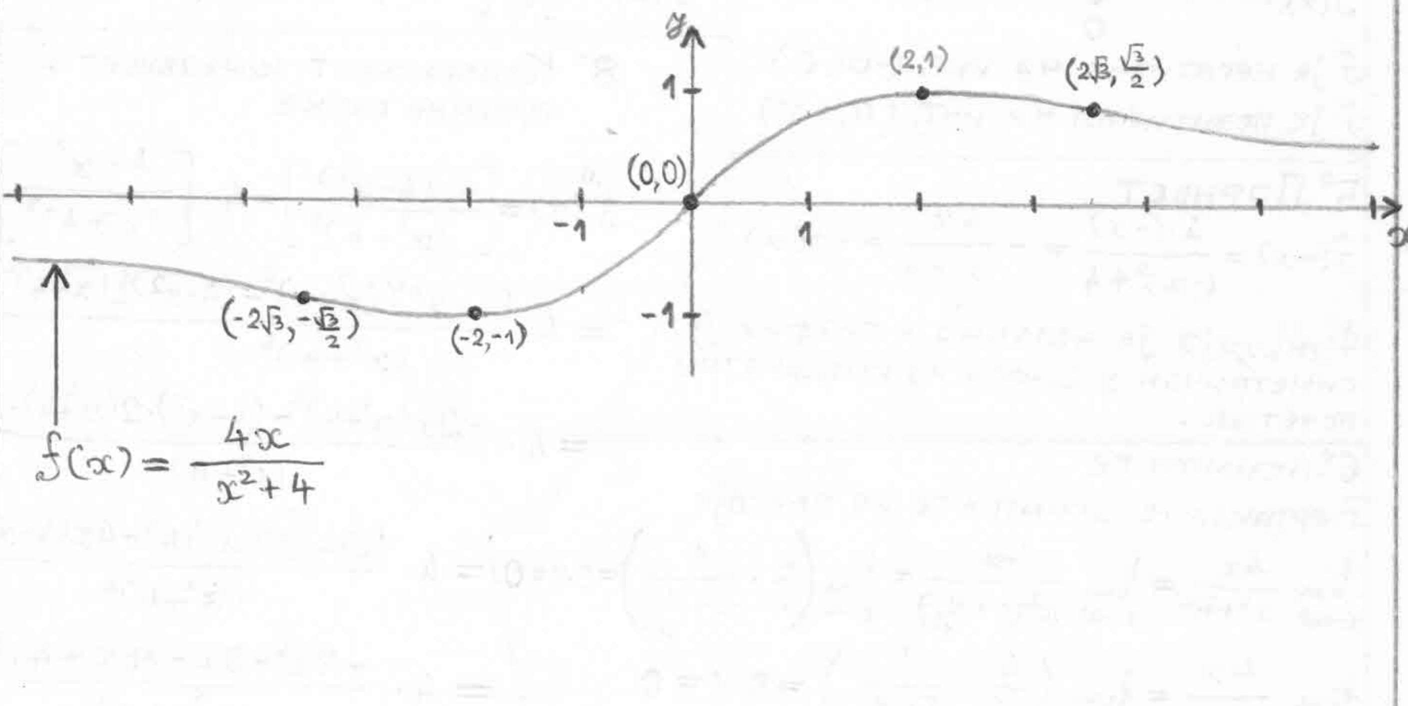
f је конвексна на интервалима $(-2\sqrt{3}, 0)$ и $(2\sqrt{3}, \infty)$.

f је конкавна на интервалима $(-\infty, -2\sqrt{3})$ и $(0, 2\sqrt{3})$.

Функција f има три превојне тачке: $f(-2\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(0)=0$, $f(2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\left(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (-3{,}5\ ,\ -0{,}9)$; $(0,0)$; $\left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (3{,}5\ ,\ 0{,}9)$.

9° График ③



2. $\begin{cases} -x+y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ -x+4y-2z=0 \end{cases}$ $D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$

$= -(-6)-(-3)-9 = 6+3-9 = 0;$

$D=0 \rightarrow$ Систем има бесконачно много решења. Систем решавамо Гаусовим методом.

$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot B1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[B1+B3 \to B3]{(-2)B1+B2 \to B2}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)B2+B3 \to B3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{K2 \leftrightarrow K3} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{(-1)B2} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{cases} x+z-y=0 \\ z-3y=0 \end{cases}$ $y=t,\ z=3t$

$x+3t-t=0,$

$x=-2t.$

Скуп решења: $(x,y,z)=(-2t,\ t,\ 3t),\ t\in\mathbb{R}.$ 17

3. $\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-4}\,dx;$ Подинтегрална функција није права рационална функција.

$x^2+3x+1 : x^2-4 = 1 + \frac{3x+5}{x^2-4};$ $\frac{x^2+3x+1}{x^2-4} = 1 + \frac{3x+5}{x^2-4};$

$\underline{-(x^2 \quad -4)}$

$3x+5$

Сада треба раставити праву рационалну функцију $\frac{3x+5}{x^2-4}$.

$\frac{3x+5}{x^2-4} = \frac{3x+5}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2}\Big|\cdot(x+2) + \frac{B}{x+2}\Big|\cdot(x-2);$

$\frac{3x+5}{x^2-4} = \frac{A(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{x^2-4};$

$\left.\begin{array}{l} A+B=3 \\ 2A-2B=5 \end{array}\right\} /\cdot(-2)$ $\left.\begin{array}{r} -2A-2B=-6 \\ 2A-2B=5 \end{array}\right\} \oplus$ $-4B=-1;$ $A=3-B=3-\frac{1}{4}$

$\boxed{B=\frac{1}{4}};$ $\boxed{A=\frac{11}{4}};$

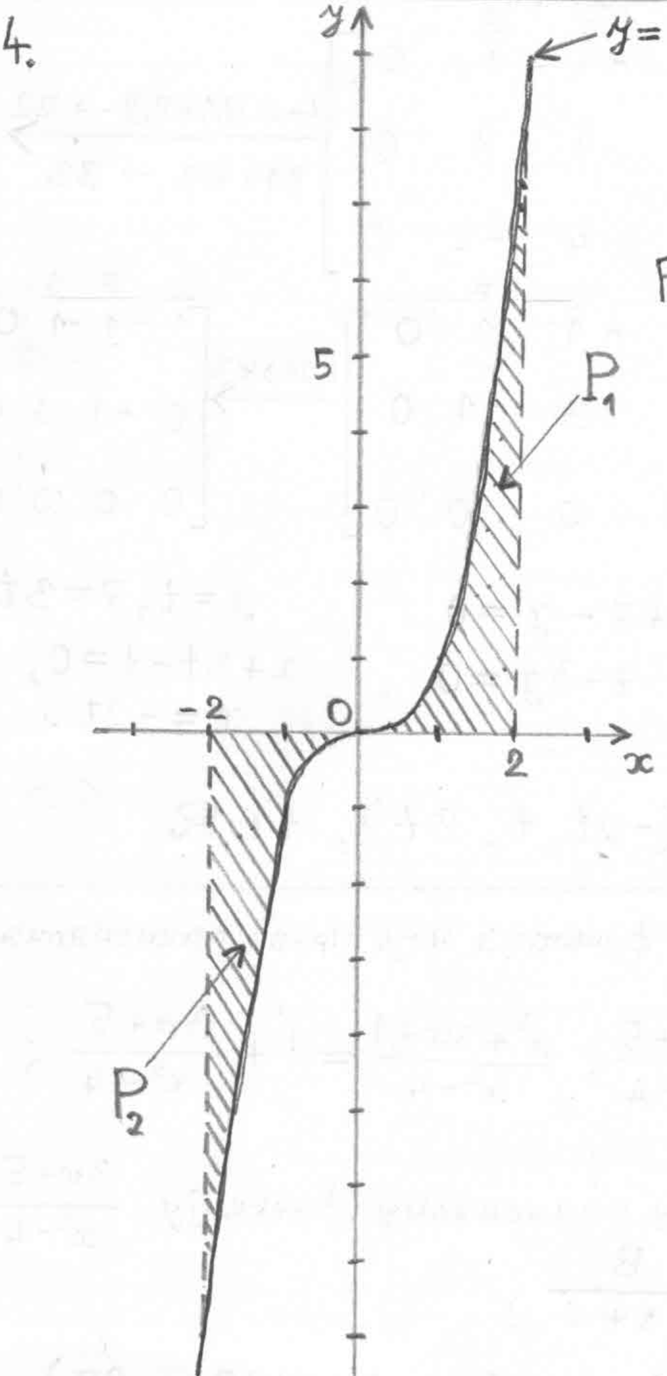
$$\frac{x^2+3x+1}{x^2-4} = 1 + \frac{11/4}{x-2} + \frac{1/4}{x+2}$$

разлагање подинтегралне ф: 9
решавање интеграла: 9

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-4}dx = \int\left[1+\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{4}\frac{1}{x+2}\right]dx =$$

$$= \int dx + \frac{11}{4}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2} = x + \frac{11}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + C.$$

4.



$$P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = \int_0^2 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

$$P_2 = -\int_{-2}^0 x^3dx = -\left[\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^0\right] = -\left[\frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}\right]$$

$$= -(0-4) = -(-4) = 4$$

$$P = 4+4 = 8.$$

* Слика: 5
* Запис тражене површине помоћу интеграла: 3
* Решавање интеграла: 9

МАТЕМАТИКА - КЉУЧ

Априлски рок, 20.4.2022. године

II група

1. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-4}$

1° Област дефинисаности

$x^2-4\neq 0,\ x\neq\pm 2;$

$D(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

2° Нуле функције

$f(x)=\dfrac{4x}{x^2-4}=0;\ 4x=0;\ x=0;$

$(0,0).$

3° Пресек са y-осом

$x=0\rightarrow f(0)=\dfrac{4\cdot 0}{0^2-4}=0;\ (0,0).$

4° Знак функције

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$4x$:	$-\,-$	$-\,-$	$+\,+$	$+\,+$
x^2-4:	$+\,+$	$-\,-$	$-\,-$	$+\,+$
$f(x)$:	$-\,-$	$+\,+$	$-\,-$	$+\,+$

$-2 \quad 0 \quad 2$

f је негативна на инт. $(-\infty,-2)$ и $(0,2)$

f је позитивна на инт. $(-2,0)$ и $(2,\infty)$

5° Парност

$f(-x)=\dfrac{4(-x)}{(-x)^2-4}=-\dfrac{4x}{x^2-4}=-f(x)$

Функција је непарна - график је симетричан у односу на координатни почетак.

6° Асимптоте

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{x}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{4}{x^2}}\right)$

$=0\cdot 1=0;$

Слично: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2-4}=0.$

Права $y=0$ (x-оса) је хоризонтална асимптота и кад $x\to\infty$ и кад $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{4x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{4x}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{-8}{(-4)(-0)}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{4x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{4x}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{-8}{(-4)(+0)}=\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{4x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{4x}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{8}{(-0)\cdot 4}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{4x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{4x}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{8}{(+0)\cdot 4}=\infty$

Праве $x=-2$ и $x=2$ су вертикалне асимптоте.

7° Монотоност и екстремне вредности

$f'(x)=\left(\dfrac{4x}{x^2-4}\right)'=\dfrac{(4x)'(x^2-4)-4x(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}$

$=\dfrac{4(x^2-4)-4x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{4x^2-16-8x^2}{(x^2-4)^2}$

$=\dfrac{-4x^2-16}{(x^2-4)^2};\quad f'(x)=-\dfrac{4(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$

$f'(x)$ је негативан број за свако x из $D(f)$;

f је опадајућа функција на инт. $(-\infty,-2),(-2,2)$ и $(2,\infty)$.

f нема локалних екстремних вредности.

8° Конвексност, конкавност и превојне тачке

$f''(x)=\left(-\dfrac{4(x^2+4)}{(x^2-4)^2}\right)'=(-4)\left(\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2}\right)'$

$=(-4)\dfrac{(x^2+4)'\cdot(x^2-4)^2-(x^2+4)[(x^2-4)^2]'}{(x^2-4)^4}$

$=(-4)\dfrac{2x(x^2-4)^2-(x^2+4)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}$

$$=(-4)\frac{(x^2-4)\left[2x(x^2-4)-4x(x^2+4)\right]}{(x^2-4)^4}=(-4)\frac{2x^3-8x-4x^3-16x}{(x^2-4)^3}=(-4)\frac{-2x^3-24x}{(x^2-4)^3}$$

$$=\frac{8x^3+96x}{(x^2-4)^3}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}\ ;\quad f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}\ ;$$

$$f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^2\cdot(x^2-4)}.$$ Чланови x^2+12 и $(x^2-4)^2$ су увек позитивни. Знак другог извода зависи од x и од x^2-4.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
x:	$--$	$--$	$++$	$++$
x^2-4:	$++$	$--$	$--$	$++$
$f''(x)$:	$--$ ⌒	$++$ ⌣	$--$ ⌒	$++$ ⌣

$f''(x)$: × у -2, • у 0, × у 2

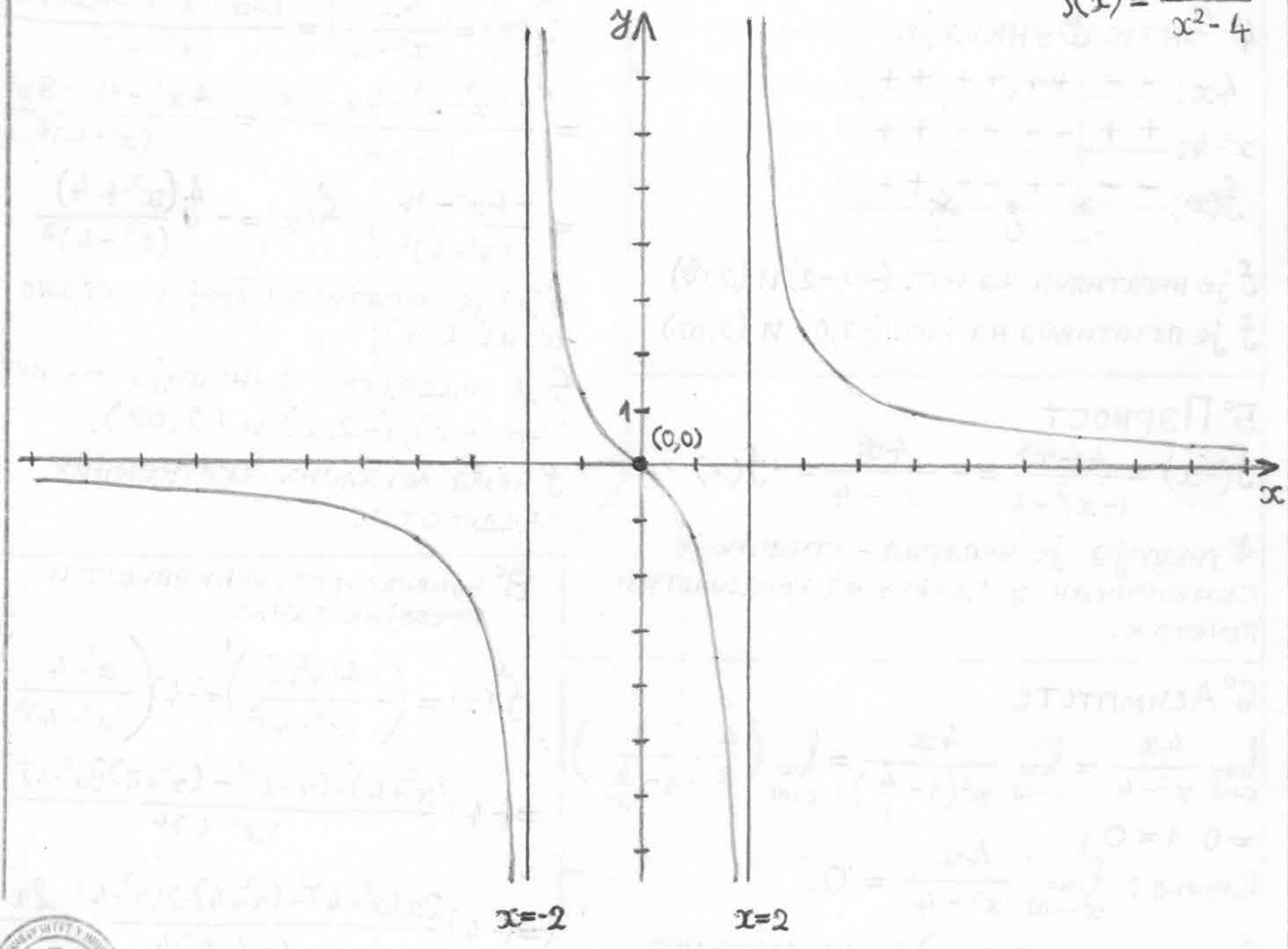
f је конвексна на инт. $(-2,0)$ и $(2,\infty)$.

f је конкавна на инт. $(-\infty,-2)$ и $(0,2)$.

Превојна тачка: $(0,0)$.

9° График

$$f(x)=\frac{4x}{x^2-4}$$



2. $\begin{cases}4x-3y-2z=0\\ 5x+9y+23z=0\\ 3x+2y+7z=0\end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}4 & -3 & -2\\ 5 & 9 & 23\\ 3 & 2 & 7\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}9 & 23\\ 2 & 7\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}5 & 23\\ 3 & 7\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}5 & 9\\ 3 & 2\end{vmatrix}$$

$$=4\cdot(63-46)+3\cdot(35-69)-2\cdot(10-27)=$$

$$=4\cdot 17+3\cdot(-34)-2\cdot(-17)=68-102+34=0$$

$D=0\rightarrow$ Систем има бесконачно много решења. Систем решавамо Гаусовим методом.

$$\begin{bmatrix}4 & -3 & -2 & 0\\ 5 & 9 & 23 & 0\\ 3 & 2 & 7 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{4}B1}\begin{bmatrix}1 & -3/4 & -1/2 & 0\\ 5 & 9 & 23 & 0\\ 3 & 2 & 7 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[(-3)B1+B3\rightarrow B3]{(-5)B1+B2\rightarrow B2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -3/4 & -1/2 & 0\\ 0 & 51/4 & 51/2 & 0\\ 0 & 17/4 & 17/2 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{4}{17}B3]{\frac{4}{51}B2}\begin{bmatrix}1 & -3/4 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1)B2+B3\rightarrow B3}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -3/4 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad \begin{cases}x-\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}z=0\\ y+2z=0\end{cases}\qquad z=t,\ y=-2t;$$

$$x-\frac{3}{4}(-2t)-\frac{1}{2}t=0,\quad x+\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}t=0,$$

$$x+t=0,\quad x=-t.$$

Скуп решења: $(x,y,z)=(-t,-2t,t),\ t\in\mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\int\frac{2x-3}{x^3+x}\,dx$; $\displaystyle\frac{2x-3}{x^3+x}=\frac{2x-3}{x(x^2+1)}=\frac{A^{\backslash(x^2+1)}}{x}+\frac{Mx+N^{\backslash x}}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Mx+N)x}{x(x^2+1)}$

$$\frac{2x-3}{x^3+x}=\frac{Ax^2+A+Mx^2+Nx}{x^3+x};\quad \frac{2x-3}{x^3+x}=\frac{(A+M)x^2+Nx+A}{x^3+x};\quad \begin{matrix}A+M=0\\ N=2\\ A=-3\end{matrix}\rightarrow\boxed{M=3}$$

$$\frac{2x-3}{x^3+x}=-\frac{3}{x}+\frac{3x+2}{x^2+1};\quad \int\frac{2x-3}{x^3+x}\,dx=\int\left[-\frac{3}{x}+\frac{3x+2}{x^2+1}\right]dx=$$

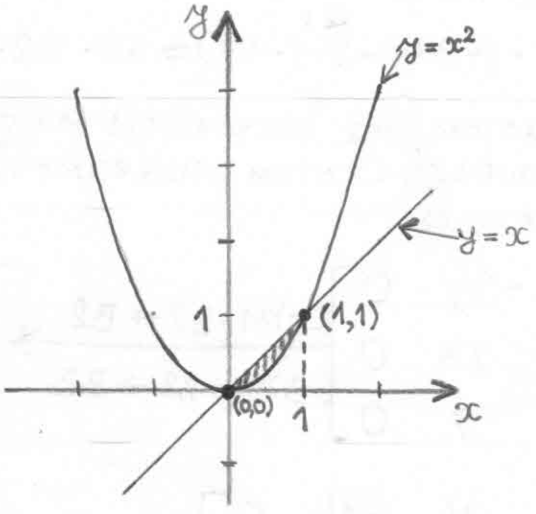
$$=-3\int\frac{dx}{x}+\int\frac{3x+2}{x^2+1}\,dx=-3\ln|x|+3\underbrace{\int\frac{x\,dx}{x^2+1}}_{J}+2\underbrace{\int\frac{dx}{x^2+1}}_{\operatorname{arctg}x};$$

$J=\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$ Смена: $t=x^2+1,\ 2x\,dx=dt$

$x\,dx=\frac{1}{2}dt$ $\qquad J=\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$$\int \frac{2x-3}{x^3+x} = -3\ln|x| + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C$$

4.



Парабола $y=x^2$ и права $y=x$ се секу у тачкама $(0,0)$ и $(1,1)$.

$$P=\int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$=\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{0^3}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-0=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Површина шрафиране области износи $P=\frac{1}{6}$.